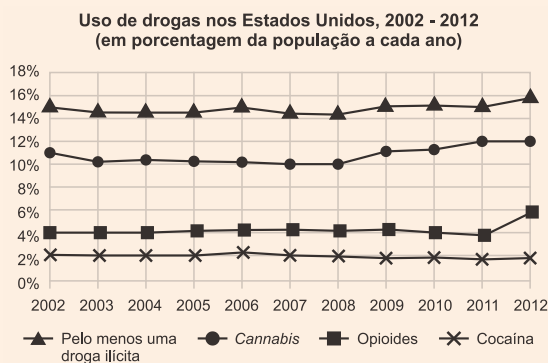


- 01| UEL** O Escritório das Nações Unidas sobre Drogas e Crime (UNODC) elabora anualmente o Relatório Mundial sobre Drogas, que inclui informações sobre produção, consumo e tráfico. O relatório da UNODC, em 2014, exibe o gráfico a seguir, que apresenta o percentual da população estadunidense que utilizou determinada droga, no ano apontado.



Com base no gráfico e supondo que *Cannabis*, opioides e cocaína são também drogas ilícitas e que a população dos Estados Unidos cresceu em 10 milhões de pessoas de 2007 a 2012, assinale a alternativa correta.

- A** De acordo com o gráfico, o conjunto dos indivíduos que utilizaram opioides em 2011 é disjuncto daquele formado por usuários de Cannabis no mesmo ano.
- B** Houve um aumento de 20% no número de indivíduos que utilizavam Cannabis nos Estados Unidos, de 2007 a 2012.
- C** A explicação para o aumento do percentual do uso de pelo menos uma droga ilícita em 2012 é o acréscimo do percentual do uso da cocaína.
- D** A probabilidade de um estadunidense, escolhido ao acaso em 2006, não utilizar droga ilícita é menor que 86%.

- E** A probabilidade de um estadunidense, escolhido ao acaso em 2004, ter utilizado pelo menos uma droga ilícita é de 18%.

- 02| FAC. ALBERT EINSTEIN** Adriana e Beatriz precisam produzir 240 peças. Juntas elas levarão um tempo  $T$ , em horas, para produzir essas peças. Se Adriana trabalhar sozinha, ela levará  $(T + 4h)$  para produzir as peças. Beatriz, sozinha, levará  $(T + 9h)$  para realizar o serviço.

Supondo que cada uma delas trabalhe em ritmo constante, o número de peças que Adriana produz a mais do que Beatriz, a cada hora, é igual a

- A** 6
- B** 8
- C** 9
- D** 10

- 03| UNISC** Considere que 12 eletricitistas levam 21 horas para realizar a instalação elétrica de uma casa e que todos os eletricitistas trabalham com a mesma eficiência. Nesse caso, se a esses eletricitistas se juntarem outros dois, com igual eficiência, então o tempo necessário para realizar o mesmo serviço será de

- A** 24,5 horas.
- B** 22 horas.
- C** 20 horas.
- D** 19 horas.
- E** 18 horas.

- 04| UERJ** Um anel contém 15 gramas de ouro 16 quilates. Isso significa que o anel contém 10g de ouro puro e 5g de uma liga metálica. Sabe-se que o ouro é considerado 18 quilates se há a proporção de 3g de ouro puro para 1g de liga metálica.



Para transformar esse anel de ouro 16 quilates em outro de 18 quilates, é preciso acrescentar a seguinte quantidade, em gramas, de ouro puro:

- A** 6
- B** 5
- C** 4
- D** 3

- 05 | UNESP** Uma companhia de engenharia de trânsito divulga o índice de lentidão das ruas por ela monitoradas de duas formas distintas, porém equivalentes. Em uma delas, divulga-se a quantidade de quilômetros congestionados e, na outra, a porcentagem de quilômetros congestionados em relação ao total de quilômetros monitorados.

O índice de lentidão divulgado por essa companhia no dia 10 de março foi de 25% e, no mesmo dia e horário de abril, foi de 200 km. Sabe-se que o total de quilômetros monitorados pela companhia aumentou em 10% de março para abril, e que os dois dados divulgados, coincidentemente, representavam uma mesma quantidade de quilômetros congestionados na cidade.

Nessas condições, o índice de congestionamento divulgado no dia 10 de abril foi de, aproximadamente,

- A** 25%
- B** 23%
- C** 27%
- D** 29%
- E** 20%

- 06 | FGV** As torneiras A, B e C, que operam com vazão constante, podem, cada uma, encher um reservatório vazio em 60 horas, 48 horas e 80 horas, respectivamente. Para encher esse mesmo reservatório vazio, inicialmente abre-se a torneira A por quatro horas e, em seguida, fecha-se a torneira A e abre-se a torneira B por quatro horas. Por fim, fecha-se a torneira B e abre-se a torneira C até que o reservatório se encha por completo.

De acordo com o processo descrito, o tempo necessário e suficiente para encher o reservatório por completo e sem transbordamento é de

- A** 84 horas.
- B** 76 horas.

- C** 72 horas.
- D** 64 horas.
- E** 60 horas.

- 07 | FAC. ALBERT EINSTEIN** Dois pilotos treinam em uma pista de corrida. Um deles fica em uma faixa interna da pista e uma volta completa nessa faixa possui 2,4 km de comprimento; o outro fica em uma faixa mais externa cuja volta completa tem 2,7 km. O piloto que possui o carro mais rápido está na faixa interna e a cada volta que ele completa o outro piloto percorre 2 km.

Se os pilotos iniciaram o treino sobre a marca de largada da pista, a próxima vez em que eles se encontrarão sobre essa marca, o piloto com o carro mais lento terá percorrido, em km, uma distância igual a

- A** 40,5
- B** 54,0
- C** 64,8
- D** 72,9

- 08 | UPE-SSA** Um grupo com 50 escoteiros vai acampar durante 28 dias. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente para esses dias e já sabem que a média de consumo por semana, para 10 pessoas é de 3.500 gramas de açúcar.

Quantos quilogramas de açúcar são necessários para os 28 dias de acampamento desse grupo?

- A** 15,5
- B** 17,5
- C** 35
- D** 50,5
- E** 70

- 09 | FGV** No início de certo ano, Fábio aplicou sua poupança em dois fundos de investimentos A e B, sendo A o de ações e B o de renda fixa.

O valor aplicado em B foi o quádruplo do aplicado em A.

Um ano depois, Fábio observou que o fundo A rendeu -2% (perda de 2%) e o B rendeu 15%.

Considerando o total aplicado, a taxa anual de rentabilidade de Fábio foi:

**A** 11,6%**B** 11,8%**C** 11,4%**D** 11,2%**E** 11,0%

- 10| FGV RJ** Duas velas do mesmo tamanho são acesas no mesmo instante.

A primeira é consumida totalmente em 4 horas e a segunda, em 3 horas.

Suponha que cada uma das velas seja consumida a uma velocidade constante.

Após serem acesas, o tamanho da primeira vela será o triplo do tamanho da segunda, decorridas:

**A** 2 h 45 min**B** 2 h 40 min**C** 2 h 48 min**D** 2 h 52 min**E** 2 h 30 min

- 11| ESPM** Um município de 250 km<sup>2</sup> de área total tem uma população estimada de 30.000 habitantes, dos quais 40% moram na zona rural, que abrange 60% de sua superfície. A densidade demográfica da zona rural desse município é de:

**A** 80 hab/km<sup>2</sup>**B** 60 hab/km<sup>2</sup>**C** 70 hab/km<sup>2</sup>**D** 90 hab/km<sup>2</sup>**E** 50 hab/km<sup>2</sup>

- 12| UPF** No Brasil, os horários reservados à propaganda política de cada período eleitoral são divididos entre os partidos e as coligações que tenham candidato e representação na Câmara dos Deputados.

O TSE, seguindo instruções da lei, tem adotado os seguintes critérios:

— o primeiro terço do tempo (dez minutos) deve ser dividido igualmente entre todos os partidos/coligações com candidatos, inclusive aqueles que não tenham representantes na Câmara dos Deputados;

— os dois terços restantes (20 minutos) ficam reservados exclusivamente para partidos/coligações que possuam representação na Câmara dos Deputados, dividindo-se o tempo de forma proporcional ao número de representantes de cada partido/coligação.

Considere que João, Antônio, Luís e Paulo se candidataram para concorrer a prefeito em um município do Rio Grande do Sul.

O candidato João concorre pelo partido PSDB; o candidato Antônio concorre pela coligação PT e PDT; o candidato Luís, pelo PCdoB; e o candidato Paulo, pela coligação DEM e PSD.

Observe o extrato de tabela abaixo, que apresenta o número de representantes de cada partido na Câmara de Deputados.

| Partido | Bancada | Nome do partido                         |
|---------|---------|-----------------------------------------|
| PT      | 58      | Partido dos Trabalhadores               |
| PSDB    | 50      | Partido da Social Democracia Brasileira |
| PSD     | 35      | Partido Social Democrático              |
| DEM     | 27      | Democratas                              |
| PDT     | 19      | Partido Democrático Trabalhista         |
| PCdoB   | 11      | Partido Comunista do Brasil             |

(Disponível em: <http://www.camara.leg.br/Internet/Deputado/bancada.asp>. Acesso em 10 set. 2016)

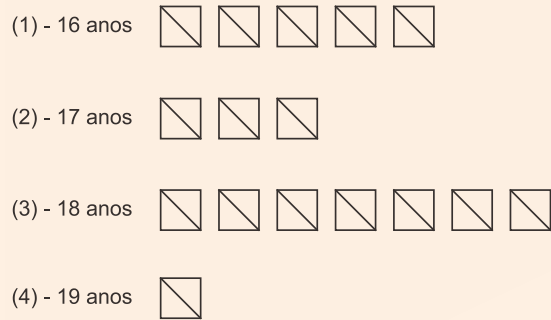
Assim, nos dias em que o programa eleitoral exibe os programas dos candidatos a prefeito, o candidato Paulo disporá de:

**A** 2,5 min**B** 6,2 min**C** 7,5 min**D** 8,7 min**E** 16,2 min

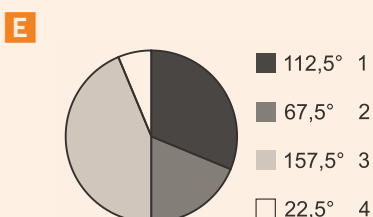
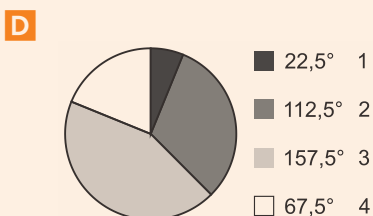
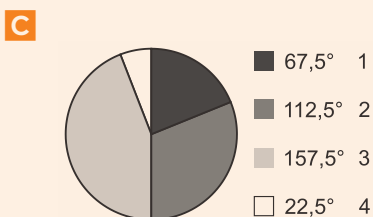
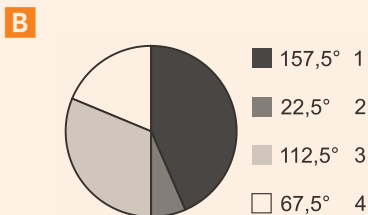
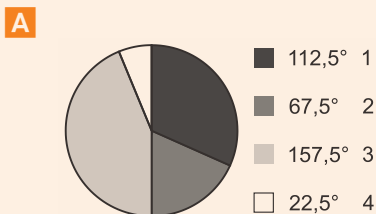
- 13| UPE-SSA** Uma pesquisa foi realizada numa turma de Ensino Médio, com a intenção de saber quais seriam as frequências das idades dos alunos de 16 a 19 anos em determinada escola. Os dados obtidos foram tabulados e organizados, conforme apresentados a seguir:



**Idades**      **frequência dos alunos tabulados**



Sabendo que os números **1, 2, 3, 4**, ao lado de cada legenda, representam, em graus, uma idade, identifique qual dos gráficos a seguir melhor representa as frequências dos alunos com relação a suas respectivas idades.



**14 | UEMG** Uma bebida A é comercializada em garrafas de 600 ml pelo preço de R\$ 250,00 a garrafa, enquanto uma bebida B é vendida em garrafas de 1L, custando R\$ 200,00 a garrafa. Dessa forma, comparando os preços por litro dessas duas bebidas, é correto afirmar que

- A** a bebida A é 25% mais cara do que a bebida B.
- B** a bebida B é 20% mais barata do que a bebida A.
- C** a bebida B é 40% mais barata do que a bebida A.
- D** a bebida B é 52% mais barata do que a bebida A.

**15 | FGV RJ** Um comerciante comprou mercadorias para revendê-las. Ele deseja marcar essas mercadorias com preços tais que, ao dar descontos de 20% sobre os preços marcados, ele ainda obtenha um lucro de 25% sobre o preço de compra.

Em relação ao preço de compra, o preço marcado nas mercadorias é:

- A** 30% maior.
- B** 40% maior.
- C** 45% maior.
- D** 50% maior.
- E** mais de 50% maior.

**16 | UPE-SSA** Patrícia aplicou, num investimento bancário, determinado capital que, no regime de juro composto, durante um ano e seis meses, à taxa de 8% ao mês, gerou um juro de R\$ 11.960,00. Qual é o capital aplicado por ela nesse investimento? Utilize  $(1,08)^{18} = 3,99$ .

- A** R\$ 3.800,00
- B** R\$ 4.000,00
- C** R\$ 4.600,00
- D** R\$ 5.000,00
- E** R\$ 5.200,00

**17 | FGV** Um capital de R\$ 5.000,00 cresce em uma aplicação financeira de modo que seu montante daqui a  $t$  anos será  $M = 5.000 e^{0,2t}$ .

Ao término do primeiro ano, o capital inicial terá crescido:



Use a tabela abaixo:

| x     | 0 | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    |
|-------|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| $e^x$ | 1 | 1,1052 | 1,2214 | 1,3499 | 1,4918 | 1,6487 |

**A** 10,52%

**B** 22,14%

**C** 34,99%

**D** 49,18%

**E** 64,87%

- 18| ESPM** Na câmara dos vereadores de uma cidade, uma proposta recebeu 42% de aprovação, 48% de rejeição e 5 vereadores se abstiveram de votar. Após intensa negociação, houve uma nova votação em que 4 dos vereadores que haviam rejeitado a proposta e 3 dos que se abstiveram passaram a aprová-la. Dessa forma, a proposta foi aprovada com um percentual de:

**A** 53%

**B** 54%

**C** 55%

**D** 56%

**E** 57%

- 19| EBMSP** Uma pesquisa realizada com 750 pessoas residentes em uma cidade industrial constatou que uma em cada três pessoas tinha algum tipo de problema pulmonar.

Considerando-se que a pesquisa admite uma margem de erro de dois pontos percentuais, para mais ou para menos, pode-se afirmar que o número de pessoas com problemas pulmonares é, no mínimo, igual a

**A** 265

**B** 258

**C** 250

**D** 242

**E** 235

- 20| FMP** João e José são amigos e conversavam sobre seus salários. João disse que havia recebido 50% de aumento e revelou o valor relativo a tal percentual. José disse que só o aumento recebido por João já correspondia a 150% do seu salário.

A diferença entre o salário de João antes do aumento e o salário de José corresponde a que percentual do salário de José?

**A** 30%

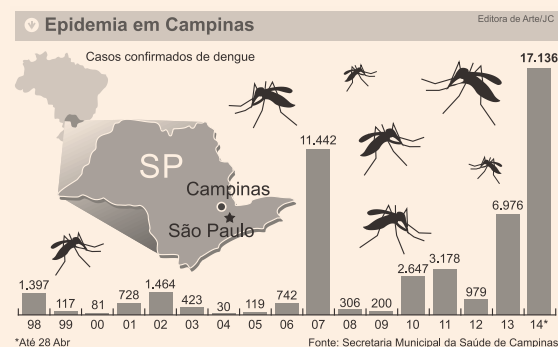
**B** 100%

**C** 150%

**D** 200%

**E** 300%

- 21| UPE** De acordo com a matéria publicada no *Jornal do Commercio*, em 14 de maio de 2014, ocorreu uma “explosão de dengue” em Campinas, interior de São Paulo. Lá se identificou a maior epidemia de dengue, com mais de 17 mil casos registrados entre janeiro e abril do referido ano. Sobre essa epidemia de dengue na cidade paulista, analise o gráfico a seguir:



Com base nessas informações, analise as afirmativas a seguir:

- A média de casos de dengue entre os anos de 2001 e 2005 é superior a 500 casos por ano.
- Em comparação ao ano de 1998, só houve aumento superior a 50% dos casos nos anos de 2002, 2007, 2010, 2011, 2013 e 2014.
- De janeiro a abril de 2014, houve um aumento superior a 140% nos casos dessa doença, em comparação ao ano de 2013.

Está CORRETO o que se afirma, apenas, em

**A** I.

**B** II.

**C** I e II.

**D** I e III.

**E** II e III.



- 22| **UEG** Um empresário determinou que o orçamento de sua empresa fosse dividido em setores, sendo 30% para o setor de produção, 50% para o setor de publicidade e o restante para os outros setores. No setor de produção ele determinou que se use  $\frac{1}{8}$

para os custos,  $\frac{1}{2}$  para o pagamento de funcionários e o restante para a manutenção das máquinas.

Sabendo-se que o orçamento da empresa é de R\$ 1.200.000,00, o valor do orçamento destinado à manutenção das máquinas é de

- A** R\$ 90.000,00
- B** R\$ 135.000,00
- C** R\$ 150.000,00
- D** R\$ 360.000,00
- E** R\$ 450.000,00

- 23| **FGV** Uma empresa fabrica um único produto a um custo variável por unidade igual a R\$ 60,00 e um custo fixo mensal de R\$ 12.000,00. Em períodos normais, a capacidade máxima de produção é de 500 unidades por mês, e a produção é totalmente vendida; nessas condições, o preço de venda é fixado em 40% acima do custo médio de produção. Em períodos de recessão, as vendas caem, atingindo apenas 80% da capacidade máxima de produção. Mantendo-se na recessão o mesmo preço vigente em períodos normais, ele será x% superior ao novo custo médio por unidade.

O valor de x é aproximadamente igual a:

\*O custo médio de produção é igual ao custo total dividido pela quantidade produzida.

- A** 39%
- B** 37%
- C** 35%
- D** 33%
- E** 31%

- 24| **FAC. ALBERT EINSTEIN** Para um concurso militar, o número de vagas para homens correspondia a 80% do número de vagas para mulheres. Dada a grande procura de candidatos, decidiu-se ampliar o número de vagas, sendo 30 novas vagas para homens e 15 para mulheres. Após a mudança, o número total de vagas para homens passou a ser 84% do número total de vagas para mulheres. Com isso, o total de vagas para ambos os sexos passou a ser

- A** 276
- B** 552
- C** 828
- D** 1.104

- 25| **UERJ** Para combater a subnutrição infantil, foi desenvolvida uma mistura alimentícia composta por três tipos de suplementos alimentares: I, II e III. Esses suplementos, por sua vez, contêm diferentes concentrações de três nutrientes: A, B e C. Observe as tabelas a seguir, que indicam a concentração de nutrientes nos suplementos e a porcentagem de suplementos na mistura, respectivamente.

| Nutriente | Concentração dos Suplementos Alimentares (g/kg) |     |     |
|-----------|-------------------------------------------------|-----|-----|
|           | I                                               | II  | III |
| A         | 0,2                                             | 0,5 | 0,4 |
| B         | 0,3                                             | 0,4 | 0,1 |
| C         | 0,1                                             | 0,4 | 0,5 |

A quantidade do nutriente C, em g/kg, encontrada na mistura alimentícia é igual a:

- A** 0,235
- B** 0,265
- C** 0,275
- D** 0,295

- 26| **FGV** Em uma prova de matemática de 10 questões, cada questão vale zero ou um ponto, não havendo pontuações intermediárias. Concede-se conceito C para os alunos que fizeram de 5 a 6 pontos, conceito B para os que fizeram de 7 a 8 pontos, e A para os que fizeram de 9 a 10 pontos. Alunos que fizeram menos do que 5 pontos recebem conceito insatisfatório. A respeito do desempenho dos alunos de uma classe nessa prova, sabe-se que nenhum deles recebeu conceito insatisfatório, 20% receberam conceito A, 36 alunos não receberam conceito A e x% dos alunos receberam conceito C, sendo x um número inteiro positivo.

Apenas com os dados informados, é possível concluir que a pontuação dos alunos que tiraram conceito A ou conceito B nessa prova pode ter sido, no máximo, igual a

- A** 162.
- B** 226.
- C** 234.
- D** 290.
- E** 306.





## GABARITO

01| **D**

Analisando as afirmativas uma a uma:

**A INCORRETA.** Pode-se verificar, pelo gráfico, que as porcentagens de usuários de opioides e usuários de *Cannabis* em 2011 são, respectivamente, 4% e 12% do total da população. Sendo o conjunto dos usuários de *Cannabis* e o conjunto dos usuários de opioides subconjuntos do conjunto dos usuários de drogas ilícitas, somando ambos se tem  $4\% + 12\% = 16\%$ , logo esses conjuntos não são disjuntos.

**B INCORRETA.** Calculando:

2007  $\rightarrow$  população  $x$  milhões e  $0,10x$  de usuários de *Cannabis*.

Aumento = 20%, logo:

$$1,2x, 0,10x = 0,12(x + 10) \rightarrow 0,12x$$

$$\rightarrow 0,12x + 10 \rightarrow \text{impossível.}$$

**C INCORRETA.** O gráfico não permite concluir nada sobre as causas do aumento do uso de pelo menos uma droga ilícita em 2012.

**D CORRETA.** Analisando o gráfico, pode-se verificar que a probabilidade de um estadunidense usar pelo menos uma droga ilícita em 2006 é maior que 14%. Assim, a probabilidade desse indivíduo não usar droga ilícita no mesmo ano será menor que 86% ( $100 - 14 = 86$ ).

**E INCORRETA.** Segundo o gráfico, a probabilidade de um estadunidense, escolhido ao acaso em 2004, ter utilizado pelo menos uma droga ilícita é menor que 16%.

02| **B**

Tem-se que

$$\frac{1}{\frac{1}{T+4} + \frac{1}{T+9}} = T \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2T+13}{(T+4)(T+9)}} = T$$

$$\Rightarrow T^2 = 36$$

$$\Rightarrow T = 6 \text{ h.}$$

Por conseguinte, Beatriz produz  $\frac{240}{15} = 16$  peças

por hora e Adriana produz  $\frac{240}{10} = 24$  peças por hora.

A resposta é  $24 - 16 = 8$ .

03| **E**

Sejam as grandezas:

$n$ : número de operários

$t$ : tempo de realização de uma determinada instalação elétrica

As grandezas  $n$  e  $t$  são inversamente proporcionais, ou seja,  $n \cdot t = \text{"constante"}$ .

Assim,

$$n_1 \cdot t_1 = n_2 \cdot t_2, \text{ onde } n_1 = 12, n_2 = 14 \text{ e } t_1 = 21.$$

Então,

$$12 \cdot 21 = 14 \cdot t_2$$

$$t_2 = 18 \text{ horas}$$

04| **B**

Seja  $x$  a quantidade de ouro puro desejada. Tem-se que

$$\frac{10+x}{15+x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x + 40 = 45 + 3x \Leftrightarrow x = 5 \text{ g.}$$

05| **B**

Sendo o índice de congestionamento inversamente proporcional ao total de quilômetros monitorados e sabendo que o número de quilômetros congestionados se manteve constante, podemos concluir que o resultado é igual a  $\frac{0,25}{1,1} \cong 23\%$ .

06| **B**

Seja  $t$  o número de horas que a torneira C ficará aberta, de modo que o reservatório fique cheio. Assim, temos

$$\frac{1}{60} \cdot 4 + \frac{1}{48} \cdot 4 + \frac{1}{80} \cdot t = 1 \Leftrightarrow t = 68 \text{ h.}$$

Portanto, a resposta é  $4 + 4 + 68 = 76$  horas.

**07| B**

A cada volta do piloto mais rápido o piloto mais lento dá  $\frac{2}{2,7} = \frac{20}{27}$  de uma volta. Logo, após  $n$

$(n \in \mathbb{N}^*)$  voltas do piloto mais rápido, o piloto mais lento terá dado  $\frac{20 \cdot n}{27}$  voltas.

Em consequência, desde que 20 e 27 são primos entre si, podemos concluir que 27 é o menor valor de  $n$  para o qual a condição do enunciado é satisfeita.

A resposta é, portanto,  $20 \cdot 2,7 = 54$  km.

**08| E**

Utilizando uma regra de três composta, temos:

| Escoteiros | Dias | Açúcar (kg) |
|------------|------|-------------|
| 50         | 28   | $x$         |
| 10         | 7    | 3,5         |

$$\frac{x}{3,5} = \frac{50}{10} \cdot \frac{28}{7} \Rightarrow x = \frac{3,5 \cdot 50 \cdot 28}{70} \Rightarrow x = 70 \text{ kg}$$

**09| A**

Calculando:

$$B = 4A$$

$$\text{Total aplicado} = A + B = A + 4B = 5A$$

$$A_{\text{final}} = 0,98A$$

$$B_{\text{final}} = 1,15B = 1,15 \cdot 4A = 4,6A$$

$$\text{Total}_{\text{final}} = A_{\text{final}} + B_{\text{final}} = 0,98A + 4,6A = 5,58A$$

$$\text{taxa} = \left( \frac{5,58A}{5A} - 1 \right) \cdot 100\% = 11,6\%$$

**10| B**

Calculando:

$t$  = tempo em horas

$$\text{Vela1} \Rightarrow h'_t = h - t \cdot \frac{h}{4}$$

$$\text{Vela2} \Rightarrow h''_t = h - t \cdot \frac{h}{3}$$

$$h' = 3h''$$

$$h - t \cdot \frac{h}{4} = 3 \cdot \left( h - t \cdot \frac{h}{3} \right) \Rightarrow h \cdot \left( 1 - \frac{t}{4} \right) = 3h \cdot \left( 1 - \frac{t}{3} \right)$$

$$1 - \frac{t}{4} = 3 - t \Rightarrow \frac{3t}{4} = 2 \Rightarrow t = 2,67 \text{ h} = 2\text{h } 40\text{min}$$

**11| A**

A densidade demográfica da zona rural é dada por

$$\frac{0,4 \cdot 30000}{0,6 \cdot 250} = 80 \text{ hab/km}^2.$$

**12| D**

Calculando:

$$\text{Total candidatos} = 4$$

$$\text{tempo}_{0,1/3} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ min}$$

$$\text{Paulo} \Rightarrow \text{DEM/PSD} = 27 + 35 = 62$$

$$\text{Total deputados} = 58 + 50 + 35 + 27 + 19 + 11 = 200$$

$$\text{tempo}_{2/3} = \frac{62 \cdot 20}{200} = 6,2 \text{ min}$$

$$\text{tempo}_{\text{total}} = 2,5 + 6,2 = 8,7 \text{ min}$$

**13| E**

**Gabarito Oficial:** ANULADA

**Gabarito SuperPro®:** [E]

O enunciado não deixa claro que os gráficos estão em função de graus. Calculando, ter-se-ia:

$$(1) 16 \text{ anos} \Rightarrow 25 \text{ alunos} \Rightarrow \frac{25}{80} = 31,25\% \Rightarrow \text{em graus} \Rightarrow 31,25\% \cdot 360^\circ = 112,5^\circ$$

$$(2) 17 \text{ anos} \Rightarrow 15 \text{ alunos} \Rightarrow \frac{15}{80} = 18,75\% \Rightarrow \text{em graus} \Rightarrow 18,75\% \cdot 360^\circ = 67,5^\circ$$

$$(3) 18 \text{ anos} \Rightarrow 35 \text{ alunos} \Rightarrow \frac{35}{80} = 43,75\% \Rightarrow \text{em graus} \Rightarrow 43,75\% \cdot 360^\circ = 157,5^\circ$$

$$(4) 19 \text{ anos} \Rightarrow 5 \text{ alunos} \Rightarrow \frac{5}{80} = 6,25\% \Rightarrow \text{em graus} \Rightarrow 6,25\% \cdot 360^\circ = 22,5^\circ$$

$$\text{Total} = 80 \text{ alunos}$$

Portanto, a alternativa correta é a [E].

**14| D**

Sendo o custo do litro da bebida A igual a

$$\frac{250}{0,6} = \frac{1250}{3} \text{ reais, tem-se que a bebida B é}$$

$$\frac{\frac{1250}{3} - 200}{\frac{1250}{3}} \cdot 100\% = 52\%$$

mais barata do que a bebida A.

**15| E**

Calculando:

$$\text{preço custo} = x$$

$$\text{preço revenda} = y$$

$$0,8y = 1,25x \Rightarrow y = 1,5625x \Rightarrow y > 1,5x$$

**16| B**

$$1 \text{ ano e 6 meses} = 18 \text{ meses.}$$

Sendo  $x$ , o capital aplicado por Patrícia, temos:

$$x \cdot (1,08)^{18} = x + 11960 \Rightarrow x \cdot 3,99 - x = 11960 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,99x = 11960 \Rightarrow x = 4000$$

Portanto, o capital empregado é de R\$ 4.000,00.



**17| B**

Calculando:

$$t = 1 \text{ ano}$$

$$M = 5000 \cdot e^{0,2 \cdot 1} = 5000 \cdot e^{0,2} = 5000 \cdot 1,2214$$

M aumentou 0,2214 ou 22,14%

**18| D**

O percentual correspondente aos cinco vereadores que se abstiveram na primeira votação é igual a  $100\% - (42\% + 48\%) = 10\%$ . Logo, podemos concluir que o número total de vereadores da câmara é  $\frac{5}{0,1} = 50$ . Assim, é imediato que  $0,42 \cdot 50 = 21$  vereadores aprovaram a proposta.

Portanto, se na votação seguinte o número de vereadores favoráveis à proposta foi igual a  $21 + 4 + 3 = 28$ , então a resposta é  $\frac{28}{50} \cdot 100\% = 56\%$ .

**19| E**

De acordo com as informações do problema o número mínimo de pessoas com problemas pulmonares será dado por:

$$\frac{1}{3} \cdot 750 - \frac{2}{100} \cdot 750 = 250 - 15 = 235$$

**20| D**

Seja  $s$  o salário de João antes do aumento. Logo, se  $r$  é o salário de José, então  $0,5s = 1,5r$ , implicando em  $s = 3r$ .

Portanto, a resposta é

$$\frac{3r - r}{r} \cdot 100\% = 200\%.$$

**21| D**

[I] **VERDADEIRA**. Calculando a média dos anos citados:

$$\frac{728 + 1464 + 423 + 30 + 119}{5} = 552,80 \text{ casos/ano}$$

[II] **FALSA**. No ano de 1998 houve 1397 casos. Para um aumento superior a 50%, são necessários mais de 2095,5 casos ( $1397 + 1397 \cdot 50\% = 2095,5$ ). No ano de 2002 houve apenas 1464 casos.

[III] **VERDADEIRA**. Calculando um aumento de 140% em relação a 2013, tem-se:

$$6976 + 6976 \cdot 140\% = 6976 + 6976 \cdot 1,4 = 16742,4$$

$$17136 \text{ casos} > 16742,4$$

**22| B**

Desde que  $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ , segue que o resultado é

$$\text{igual a } \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot 1.200.000 = \text{R\$ } 135.000,00.$$

**23| E**

Calculando:

C = custo produção em reais

R = preço venda em reais

$$C_{\text{normal}} = \frac{12000 + 60 \cdot 500}{500} = 84$$

$$R_{\text{normal}} = 1,4 \cdot 84 = 117,60$$

$$C_{\text{recessão}} = \frac{12000 + 60 \cdot 500 \cdot 0,8}{500 \cdot 0,8} = 90$$

$$R_{\text{recessão}} = R_{\text{normal}} = 117,60$$

$$\frac{117,60 - 90}{90} = 0,3067 \approx 31\%$$

**24| C**

Sejam  $x$  e  $y$ , respectivamente, o número de vagas para homens e o número de vagas para mulheres. Logo, tem-se inicialmente que  $x = 0,8y$ .

Após a mudança, a relação entre os números de vagas passou a ser  $x + 30 = 0,84(y + 15)$ .

Em consequência, temos

$$0,8y + 30 = 0,84(y + 15) \Leftrightarrow 0,04y = 17,4$$

$$\Leftrightarrow y = 435.$$

A resposta é  $1,8 \cdot 435 + 45 = 828$ .**25| D**

Calculando, conforme dados das tabelas:

$$C = 0,1 \cdot 0,45 + 0,4 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,30 \rightarrow$$

$$\rightarrow C = 0,295 \text{ g / kg}$$

**26| E**

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, o número de alunos que receberam A, o número de alunos que receberam B e o número de alunos que receberam C. Logo, tem-se que

$$0,8 \cdot (a + b + c) = 36 \Leftrightarrow a + b + c = 45.$$



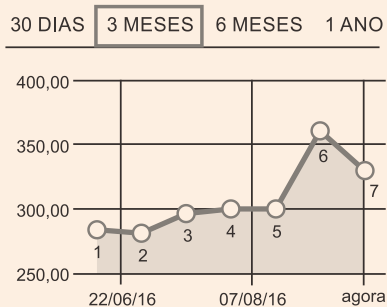
Em consequência, vem  $a = 0,2 \cdot 45 = 9$  e, assim, encontramos

$$b + \frac{x}{100} \cdot 45 = 36 \Leftrightarrow b = 36 - \frac{9x}{20}.$$

Sabendo que  $x$  é um inteiro positivo, deve-se ter  $x$  mínimo a fim de maximizarmos  $b$ , isto é,  $x = 20$ . Portanto, é fácil concluir que o valor máximo de  $b$  é 27.

A soma dos pontos obtidos pelos alunos que tiraram A ou B é máxima quando todos os alunos obtêm o máximo de pontos em cada conceito, ou seja,  $9 \cdot 10 + 27 \cdot 8 = 306$ .

**01| CFTRJ** O gráfico a seguir foi mostrado em um aplicativo que consulta diversas lojas e retorna o menor preço de uma mercadoria. O período apresentado é de 3 meses e são ressaltados 7 instantes, números de 1 a 7, onde 7 indica o instante da consulta.



Menor preço registrado: **R\$ 280,79**  
dia 01/07/16, há 82 dias

Menor preço hoje: **R\$ 329,99**  
R\$ 49,20 mais caro

O aplicativo também mostra um resumo com o menor preço registrado do período, que foi de R\$ 280,79 e o menor preço atual, de R\$ 329,99.

Qual das afirmações a seguir é a verdadeira?

- A** A maior variação de “menor preço” no período consultado é de R\$ 49,20.
- B** A variação de “menor preço” do instante 2 ao instante 5 foi maior que a variação de “menor preço” do instante 5 para o instante 6.
- C** No momento da consulta o “menor preço” é o maior do período.
- D** O mais alto “menor preço” do período supera em mais de 10% o mais baixo “menor preço” do período.

**02| UFJF** Observe abaixo as alturas dos dez maiores atletas da delegação brasileira que participaram das olimpíadas no Rio de Janeiro.

| Atleta           | Esporte        | Altura (m) |
|------------------|----------------|------------|
| Anderson Varejão | Basquete       | 2,11       |
| Augusto Lima     | Basquete       | 2,08       |
| Éder             | Vôlei          | 2,05       |
| Evandro          | Vôlei de praia | 2,10       |
| Evandro          | Vôlei          | 2,07       |
| Lucão            | Vôlei          | 2,10       |
| Marquinho        | Basquete       | 2,07       |
| Maurício Souza   | Vôlei          | 2,06       |
| Nenê             | Basquete       | 2,11       |
| Rafael           | Basquete       | 2,08       |

Dados disponíveis em: <<http://migre.me/uYvbm>>.

Acesso em: 13 set. 2016.

A **mediana** das alturas desses atletas, em metros, é:

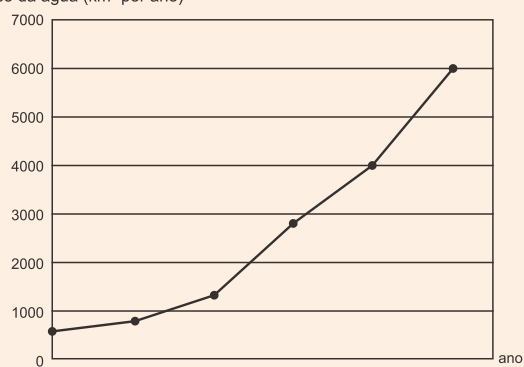
- A** 2,05
- B** 2,07
- C** 2,08
- D** 2,10
- E** 2,11

**03| UFRGS** As estimativas para o uso da água pelo homem, nos anos 1900 e 2000, foram, respectivamente, de 600 km<sup>3</sup> e 4.000 km<sup>3</sup> por ano. Em 2025, a expectativa é que sejam usados 6.000 km<sup>3</sup> por ano de água na Terra.

O gráfico abaixo representa o uso da água em km<sup>3</sup> por ano de 1900 a 2025.



Uso da água (km³ por ano)

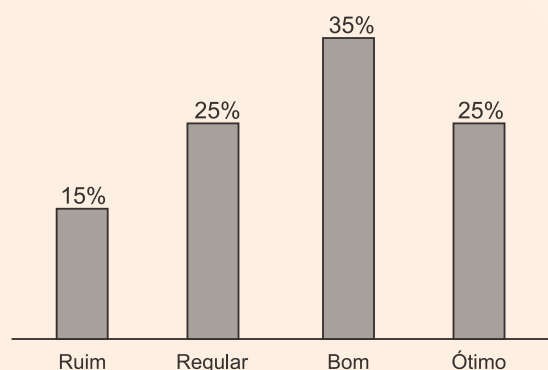
Fonte: <http://www.fao.org>

Com base nos dados do gráfico, é correto afirmar que,

- A** de 1900 a 1925, o uso de água aumentou em 100%.
- B** de 1900 a 2000, o uso da água aumentou em mais de 600%.
- C** de 2000 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 66,6%
- D** de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 900%.
- E** de 1900 a 2025, mantida a expectativa de uso da água, o aumento será de 1.000%.

- 04 | CP2** O gráfico a seguir apresenta o desempenho de uma turma do nono ano de certa escola na primeira prova de Matemática de 2016.

Desempenho em Matemática



Esse gráfico foi construído a partir das notas (de 0,0 a 10,0) dos quarenta alunos da turma baseada no padrão apresentado na tabela.

| Nota          | Classificação |
|---------------|---------------|
| De 0,0 a 4,9  | Ruim          |
| De 5,0 a 6,9  | Regular       |
| De 7,0 a 8,4  | Bom           |
| De 8,5 a 10,0 | Ótimo         |

Sabe-se que

- no dia da referida avaliação, nenhum aluno faltou;
- a média estipulada pela escola é 7,0; e
- alunos com nota abaixo de 5,0 devem fazer recuperação.

Podemos afirmar que

- A** 20 alunos devem fazer recuperação.
- B** 18 alunos tiraram nota abaixo da média.
- C** 36 alunos não precisam fazer recuperação.
- D** 24 alunos tiraram nota maior ou igual à média.

- 05 | EEAR** A tabela seguinte informa a quantidade de pessoas que compraram ingressos antecipados de um determinado show, cujos preços eram modificados semanalmente.

| Valor do ingresso (R\$) | Número de pessoas |
|-------------------------|-------------------|
| 50   75                 | 300               |
| 75   100                | 640               |
| 100   125               | 500               |
| 125   150               | 1.310             |
| 150   175               | 850               |
|                         | $\Sigma = 3.600$  |

O percentual de pessoas que adquiriram o ingresso por menos de R\$ 125,00 foi

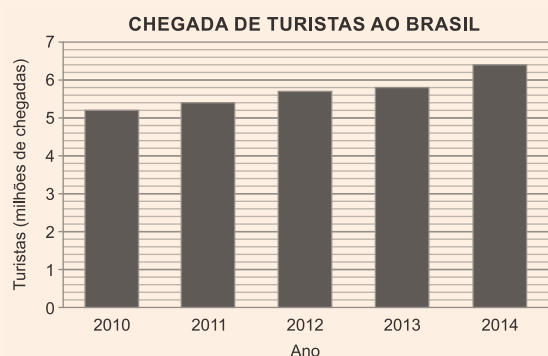
- A** 40%
- B** 45%
- C** 50%
- D** 55%



- 06| **FGV** Removendo um número do conjunto  $\{11, 12, 17, 18, 23, 29, 30\}$  formamos um novo conjunto com média aritmética dos elementos igual a 18,5. A mediana dos elementos desse novo conjunto é igual a

**A** 26,5  
**B** 26,0  
**C** 20,5  
**D** 17,5  
**E** 14,5

- 07| **CFTRJ** Considerando as informações do gráfico abaixo, de 2010 a 2014 o número de turistas que chegaram ao Brasil cresceu ano após ano. Por exemplo, em 2010 chegaram 5,2 milhões de turistas ao Brasil e em 2011 5,4 milhões de turistas. Um aumento de 200 mil chegadas de turistas no Brasil.



Fonte: MINISTÉRIO DO TURISMO. Estatística Básica de Turismo.

Disponível em: (<http://www.turismo.gov.br>). Acesso em: 06/09/2016.

O aumento percentual de turistas que chegaram ao Brasil em 2014, comparado com o ano anterior, foi de aproximadamente:

**A** 10,3%  
**B** 12,5%  
**C** 9,1%  
**D** 13,2%

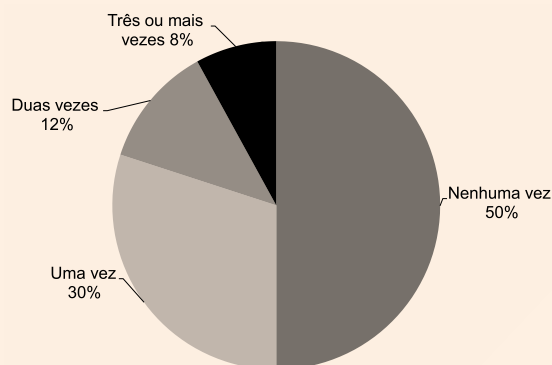
- 08| **UFJF** Um nutricionista indicou três dietas diferentes para grupos de pacientes que gostariam de perder peso (em quilogramas). A tabela a seguir indica a perda de peso (em quilogramas) por paciente de cada grupo.

| Grupo 1 | Grupo 2 | Grupo 3 |
|---------|---------|---------|
| 2       | 2       | 3       |
| 3       | 2       | 4       |
| 4       | 2       | 4       |
| 4       | 3       | 4       |
| 5       | 3       | 5       |
| 6       | 5       | 6       |
| 8       | 8       | 6       |
| 10      | 9       | 5       |

A partir desses dados, a **média** de perda de peso do grupo 1, a **mediana** de perda de peso do grupo 3 e a **moda** da perda de peso do grupo 2 é dado, respectivamente, por:

**A** 5,25; 4,5; 2,0.  
**B** 4,25; 4,5; 3,0.  
**C** 4,75; 2,0; 4,0.  
**D** 5,25; 3,0; 4,5.  
**E** 4,75; 4,0; 4,5.

- 09| **UEG** Uma agência de viagem entrevistou 50 idosos perguntando-lhes quantas viagens eles tinham feito para o exterior. O gráfico a seguir apresenta os resultados dessas entrevistas.



Baseando-se na informação do gráfico, a mediana do número de vezes que esses idosos viajaram para o exterior é de

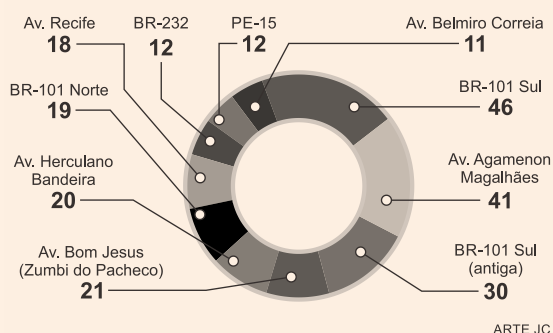
**A** 0,5  
**B** 0,0  
**C** 2,0  
**D** 1,0  
**E** 1,5



**10| UPE-SSA** Segundo matéria do Caderno Cidades do *Jornal do Commercio*, publicada em 8 de maio de 2016, um relatório oficial de assaltos a coletivos entre janeiro e abril de 2016 apontou os locais e as linhas de ônibus que mais sofreram esse tipo de violência no período citado.

Com base nessas informações, analise o gráfico publicado na referida matéria.

● **Locais mais assaltados**



De acordo com o gráfico, a média, a mediana e a moda do número de assaltos por local são respectivamente:

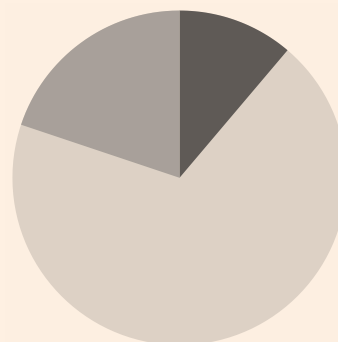
- A** 19; 20 e 12
- B** 23; 19,5 e 12.
- C** 19; 12 e 46
- D** 23; 12 e 19
- E** 19,5; 12 e 18

**11| PUCRS** A matriz abaixo apresenta a distribuição das matrículas, por níveis, nas escolas de Porto Alegre.

| Nível       | Matrículas |
|-------------|------------|
| Pré-escolar | 25.007     |
| Fundamental | 159.162    |
| Médio       | 45.255     |

FONTE: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais — INEP — Censo Educacional 2015

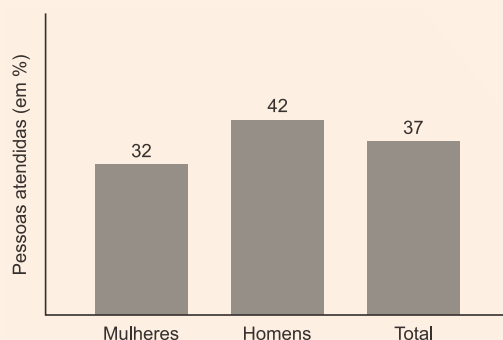
Se esses dados forem organizados em um gráfico de setores, o ângulo central correspondente ao nível Fundamental será de, aproximadamente,



Pré-escolar  
Médio  
Fundamental

- A** 150°
- B** 180°
- C** 200°
- D** 230°
- E** 250°

**12| EBMSP**



O gráfico ilustra o número percentual de pessoas que, atendidas em um posto de saúde, em determinado período, apresentou problemas cardíacos.

Com base nos dados do gráfico e considerando-se M o número de mulheres e H o número de homens atendidos, nesse período, é correto afirmar:

- A**  $H = M - 10$
- B**  $H = M$
- C**  $H = M + 5$
- D**  $H = M + 10$
- E**  $H = 2M$

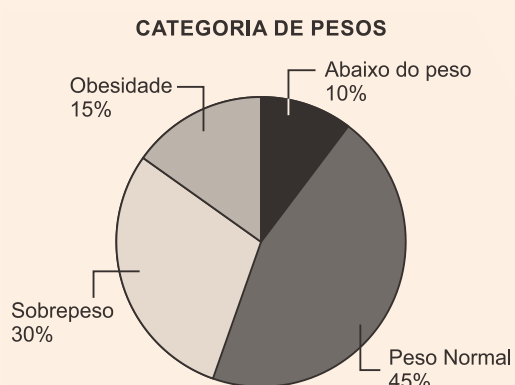




**13| CP2** Uma das medidas ainda muito utilizadas para avaliar o peso de uma pessoa é o IMC (Índice de Massa Corporal), obtido dividindo-se seu peso (em quilogramas) pelo quadrado da sua altura (em metros).

Essa medida é usada, por exemplo, para determinar em que categoria de peso a pessoa avaliada se encontra: abaixo do peso, peso normal, sobrepeso ou obesidade.

Foi feita uma pesquisa sobre o IMC em um grupo de 240 pessoas e os resultados obtidos são apresentados no gráfico a seguir:

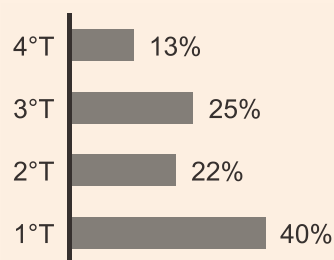
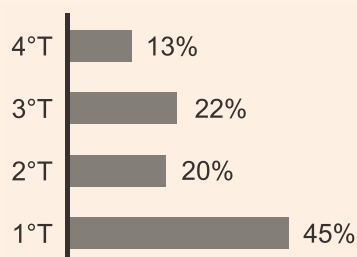
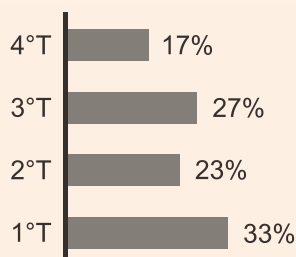
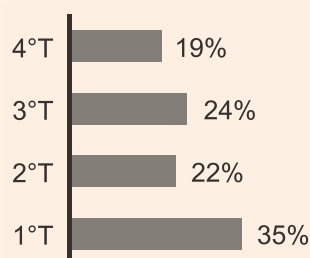
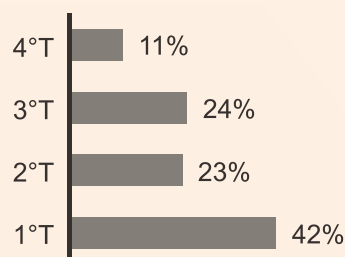


Podemos afirmar que, nesse grupo estudado, há

- A** mais de 30 pessoas abaixo do peso.
- B** menos de 72 pessoas com sobrepeso.
- C** exatamente 35 pessoas com obesidade.
- D** exatamente 108 pessoas com peso normal.

**14| UFPR** O Centro de Estudos, Resposta e Tratamento de Incidentes de Segurança no Brasil (CERT.br) é responsável por tratar incidentes de segurança em computadores e redes conectadas à Internet no Brasil. A tabela abaixo apresenta o número de mensagens não solicitadas (spams) notificadas ao CERT.br no ano de 2015, por trimestre. Qual dos gráficos abaixo representa os dados dessa tabela?

| Trimestre | Notificações |
|-----------|--------------|
| 4° T      | 135.335      |
| 3° T      | 171.523      |
| 2° T      | 154.866      |
| 1° T      | 249.743      |

**A****B****C****D****E**

**TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:**

Leia o gráfico referente ao rendimento médio mensal na Região Metropolitana de Belo Horizonte (BH), no período de 2010 a 2013, para responder à(s) questão(ões).



15| **FATEC** Sobre os dados do gráfico, podemos afirmar corretamente que a média do rendimento médio mensal das mulheres, no período de 2010 a 2013 foi, em reais, de

- A** 1.378,05
- B** 1.366,15
- C** 1.354,25
- D** 1.342,55
- E** 1.330,75

**GABARITO**

01| **D**

- [A] Falsa, pois o maior preço é maior que R\$ 329,99.
- [B] Falsa, pois a variação de “menor preço” do instante 2 ao instante 5 foi **menor** que a variação de “menor preço” do instante 5 para o instante 6.
- [C] Falsa, pois existem preços maiores que ele.
- [D] Verdadeira, pois  $11 \cdot 280,78 = 308,86 < 350$  e o maior preço registrado é maior que 350.

02| **C**

Ordenando as alturas, encontramos:

2,05; 2,06; 2,07; 2,07; 2,08; 2,08; 2,10; 2,10; 2,11; 2,11.

A resposta é  $\frac{2,08 + 2,08}{2} = 2,08$ .

03| **D**

- [A] Falsa, pois  $600(1+100\%) = 1.200$  (maior que 1.000)
- [B] Falsa, pois  $600(1+600\%) = 4.200$  (maior que 4.000)
- [C] Falsa, pois  $4000(1+66,6\%) = 6.664$  (maior que 6.000)
- [D] Verdadeira, pois  $600(1+900\%) = 6.000$
- [E] Falsa, pois  $600(1+1000\%) = 6.600$

04| **D**

- [A] Falsa, pois  $15\%$  de  $40 = 6$ .
- [B] Falsa, pois  $(15 + 25)\%$  de  $40 = 16$ .
- [C] Falsa, pois  $40 - 6 = 34$  (alunos que não precisam de recuperação).
- [D] Verdadeira,  $(35 + 25)\%$  de  $40 = 24$ .

05| **A**

Tem-se que a resposta é dada por

$$\frac{300 + 640 + 500}{3.600} \cdot 100\% = 40\%.$$

06| **D**

Seja  $n$  o número retirado. Logo, desde que a soma dos elementos do conjunto  $\{11, 12, 17, 18, 23, 29, 30\}$  é igual a 140, temos

$$18,5 = \frac{140 - n}{6} \Leftrightarrow n = 29.$$

Em consequência, o novo conjunto é  $\{11, 12, 17, 18, 23, 30\}$ .

A resposta é igual a  $\frac{17+18}{2} = 17,5$ .

07| **A**

Turistas em 2013: 5,8 milhões.

Turistas em 2014: 6,4 milhões.

Aumento percentual:  $\frac{6,4 - 5,8}{5,8} = \frac{0,6}{5,8} \approx 10,3\%$

**08| A**

A perda de peso média do grupo 1 é dada por

$$\frac{2+3+4+4+5+6+8+10}{8} = \frac{42}{8} = 5,25.$$

Ordenando as perdas de peso do grupo 3, obtemos: 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6. Daí, segue que a perda de peso mediana deste grupo é  $\frac{4+5}{2} = 4,5$ .

É imediato que a perda de peso modal do grupo 2 é igual a 2.

**09| A**

Como o número de observações é par, segue que a mediana corresponde à média aritmética simples das observações de ordem 25 e 26, ou seja,  $\frac{0+1}{2} = 0,5$ .

**10| B**

Rol: 11, 12, 12, 18, 19, 20, 21, 30, 41, 46

$$\text{Média} = \frac{11+12+12+18+19+20+21+30+41+46}{10} = 23$$

$$\text{Mediana} = \frac{19+20}{2} = 19,5$$

Moda: 12

**11| E**

A resposta é dada por:

$$\frac{159162}{25007+159162+45255} \cdot 360^\circ \cong 250^\circ.$$

**12| B**

De acordo com o gráfico, podemos escrever que:

$$(M+H) \cdot 0,37 = 0,32 \cdot M + 0,42 \cdot H$$

$$0,37 \cdot M + 0,37 \cdot H = 0,32 \cdot M + 0,42 \cdot H$$

$$0,37 \cdot M - 0,32 \cdot M = 0,42 \cdot H - 0,37 \cdot H$$

$$0,05 \cdot M = 0,05 \cdot H$$

$$M = H$$

**13| D**

$$[A] \text{ Falsa, pois } \frac{10}{100} \cdot 240 = 24.$$

$$[B] \text{ Falsa, pois } \frac{30}{100} \cdot 240 = 72.$$

$$[C] \text{ Falsa, pois } \frac{15}{100} \cdot 240 = 36.$$

$$[D] \text{ Verdadeira, pois } \frac{45}{100} \cdot 240 = 108.$$

**14| D**

Desde que o total de notificações é igual a

$$135335 + 171523 + 154866 + 249743 = 711467$$

tem-se que o percentual correspondente ao quarto trimestre é

$$\frac{135335}{711467} \cdot 100\% \cong 19\%.$$

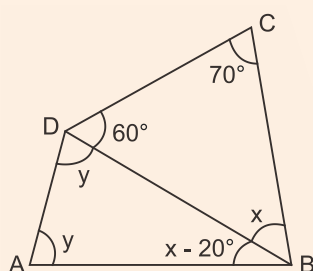
Portanto, o gráfico que representa os dados da tabela é o da alternativa [D].

**15| E**

$$\frac{1312+1323+1278+1410}{4} = 1.330,75$$

Resumo das questões selecionadas nesta atividade

01|



No quadrilátero ABCD, o valor de  $y - x$  é igual a

- A  $2x$
- B  $2y$
- C  $\frac{x}{2}$
- D  $\frac{y}{2}$

02| Em um triângulo ABC,  $\widehat{BAC}$  é o maior ângulo e  $\widehat{ACB}$  é o menor ângulo. A medida do ângulo  $\widehat{BAC}$  é  $70^\circ$  maior que a medida de  $\widehat{ACB}$ . A medida de  $\widehat{BAC}$  é o dobro da medida de  $\widehat{ABC}$ .

Portanto, as medidas dos ângulos são

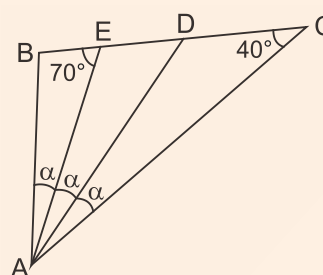
- A  $20^\circ, 70^\circ$  e  $90^\circ$ .
- B  $20^\circ, 60^\circ$  e  $100^\circ$ .
- C  $10^\circ, 70^\circ$  e  $100^\circ$ .
- D  $30^\circ, 50^\circ$  e  $100^\circ$ .
- E  $30^\circ, 60^\circ$  e  $90^\circ$ .

03| No plano, seja XYZW um quadrado e E um ponto exterior a esse quadrado tal que o triângulo YZE seja equilátero. Assim, é correto

afirmar que a medida do ângulo  $\widehat{XEW}$  é

- A  $45^\circ$ .
- B  $40^\circ$ .
- C  $35^\circ$ .
- D  $30^\circ$ .

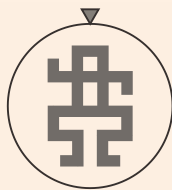
04|



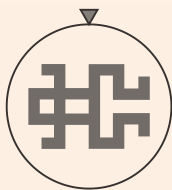
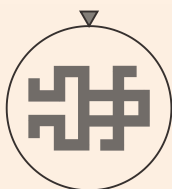
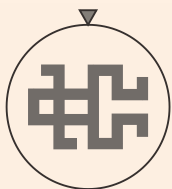
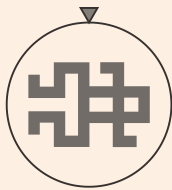
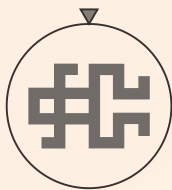
Se ABC é um triângulo, o valor de  $\alpha$  é

- A  $10^\circ$
- B  $15^\circ$
- C  $20^\circ$
- D  $25^\circ$

05| Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura 1, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.



Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em

**A****B****C****D****E**

- 06** | Sejam  $UVW$  um triângulo isósceles com base  $VW$ ;  $E$  e  $F$  dois pontos nos lados  $UV$ ; e  $UW$ , respectivamente, tais que as medidas dos seg-

mentos de reta  $VW$ ,  $WE$ ,  $EF$  e  $FU$  são iguais.

Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo  $V\hat{U}W$  é

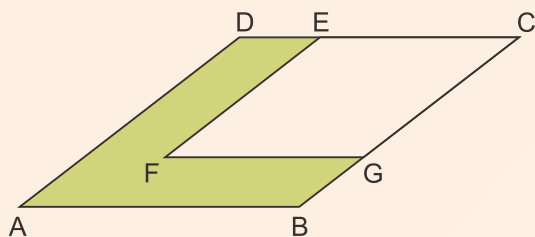
- A** menor do que  $21^\circ$ .
- B** maior do que  $21^\circ$  e menor do que  $25^\circ$ .
- C** maior do que  $25^\circ$  e menor do que  $27^\circ$ .
- D** maior do que  $27^\circ$  e menor do que  $32^\circ$ .

- 07** | Considere o triângulo  $ABC$ , em que os segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CB}$  e  $\overline{AB}$  medem, respectivamente, 10 cm, 15 cm e 20 cm. Seja  $D$  um ponto do segmento  $\overline{AB}$  de tal modo que  $\overline{CD}$  é bissetriz do ângulo  $A\hat{C}B$  e seja  $E$  um ponto do prolongamento de  $\overline{CD}$ , na direção de  $D$ , tal que  $D\hat{B}E = D\hat{C}B$ . A medida, em cm, de  $\overline{CE}$  é

- A**  $\frac{11\sqrt{6}}{3}$ .
- B**  $\frac{13\sqrt{6}}{3}$ .
- C**  $\frac{17\sqrt{6}}{3}$ .
- D**  $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ .
- E**  $\frac{25\sqrt{6}}{3}$ .

- 08** | Ao somar o número de diagonais e o número de lados de um dodecágono obtém-se
- A** 66
  - B** 56
  - C** 44
  - D** 42

- 09** | Na figura, o losango  $FGCE$  possui dois lados sobrepostos aos do losango  $ABCD$  e sua área é igual à área indicada em verde.



Se o lado do losango ABCD mede 6 cm, o lado do losango FGCE mede

- A**  $2\sqrt{5}$  cm.
- B**  $2\sqrt{6}$  cm.
- C**  $4\sqrt{2}$  cm.
- D**  $3\sqrt{3}$  cm.
- E**  $3\sqrt{2}$  cm.

- 10|** Dado um quadrado ABCD, de lado  $a$ , marcam-se os pontos E sobre o lado AB, F sobre o lado BC, G sobre o lado CD e H sobre o lado AD, de modo que os segmentos formados AE, BF, CG, e DH tenham comprimento

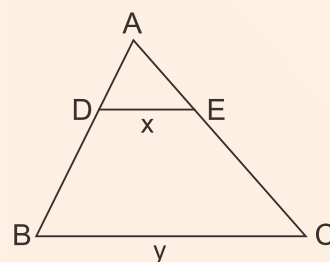
igual a  $\frac{3a}{4}$ .

A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos AF, BG, CH, e DE mede:

- A**  $\frac{a^2}{25}$
- B**  $\frac{a^2}{18}$
- C**  $\frac{a^2}{16}$
- D**  $\frac{a^2}{9}$
- E**  $\frac{2a^2}{9}$

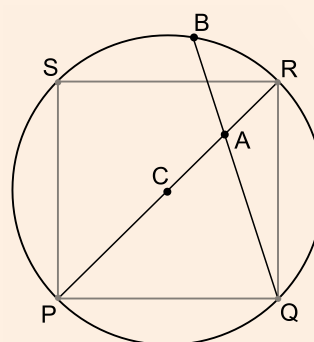
- 11|** Seja um triângulo ABC, conforme a figura. Se D e E são pontos, respectivamente, de AB

e AC, de forma que  $\overline{AD} = 4$ ,  $\overline{DB} = 8$ ,  $\overline{DE} = x$ ,  $\overline{BC} = y$ , e se  $DE \parallel BC$ , então



- A**  $y = x + 8$
- B**  $y = x + 4$
- C**  $y = 3x$
- D**  $y = 2x$

- 12|** O quadrado PQRS está inscrito em um círculo de centro C. A corda intersecciona a diagonal do quadrado em A, sendo que  $\overline{QA} = 6$  cm e  $\overline{AB} = 4$  cm.



Nas condições descritas, a medida do lado do quadrado PQRS, em cm, é igual a

- A**  $2\sqrt{10}$ .
- B**  $5\sqrt{2}$ .
- C**  $2\sqrt{15}$ .
- D**  $6\sqrt{2}$ .
- E**  $7\sqrt{2}$ .

- 13|** Os lados de um triângulo medem 13 cm, 14 cm e 15 cm, e sua área mede  $84 \text{ cm}^2$ .

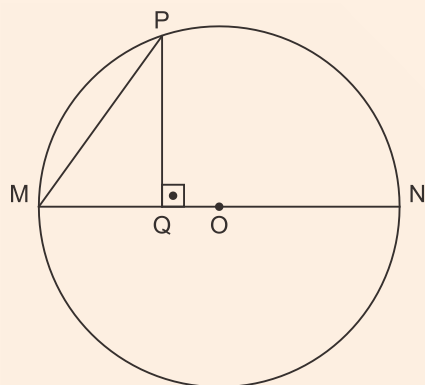


Considere um segundo triângulo, semelhante ao primeiro, cuja área mede  $336 \text{ cm}^2$ .

A medida do perímetro do segundo triângulo, em centímetros, é

- A** 42
- B** 84
- C** 126
- D** 168
- E** 336

- 14** | 2017) Na figura, o raio da circunferência de centro O é  $\frac{25}{2} \text{ cm}$  e a corda MP mede 10 cm.



desenho ilustrativo – fora de escala

A medida, em centímetros, do segmento PQ é

- A**  $\frac{25}{2}$
- B** 10
- C**  $5\sqrt{21}$
- D**  $\sqrt{21}$
- E**  $2\sqrt{21}$

- 15** | 2017) Se o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em um círculo é 3 cm, a área do círculo (em  $\text{cm}^2$ ) é igual a

- A**  $\frac{\delta}{3}$
- B**  $3\delta$

- C**  $\delta$
- D**  $3\sqrt{3}\delta$
- E**  $81\delta$

- 16** | Seja ABC um triângulo cujos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado  $\overline{BC}$  tais que  $\overline{AM}$  é a altura relativa a  $\overline{BC}$  e N é o ponto médio de  $\overline{BC}$ . A área do triângulo AMN, em  $\text{cm}^2$ , é

- A** 3,36.
- B** 3,60.
- C** 4,20.
- D** 4,48.
- E** 6,72.

- 17** | Em um triângulo retângulo, o maior e o menor lado medem, respectivamente, 12 cm e 4 cm. Qual é a área desse triângulo?

- A**  $4\sqrt{2} \text{ cm}^2$ .
- B**  $16 \text{ cm}^2$ .
- C**  $8\sqrt{2} \text{ cm}^2$ .
- D**  $16\sqrt{2} \text{ cm}^2$ .
- E**  $24 \text{ cm}^2$ .

- 18** | Os lados de uma folha retangular ABCD de papel medem 10 cm e 6 cm, como indica a Figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C, como mostra a Figura 2.





Figura 1

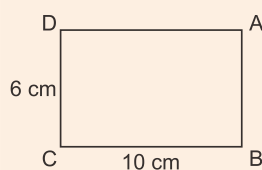
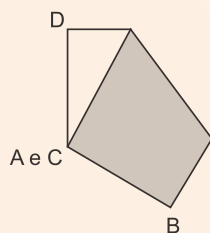


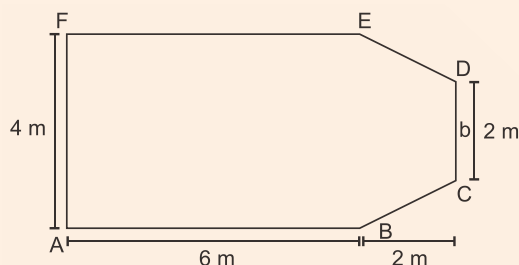
Figura 2



A área do trapézio cinza indicado na Figura 2, em  $\text{cm}^2$ , é igual a

- A** 23.
- B** 30.
- C** 25.
- D** 40.
- E** 45.

- 19** Marcos comprou a quantidade mínima de piso para colocar em toda a sua sala que tem o formato abaixo e pagou R\$ 48,00 o metro quadrado.

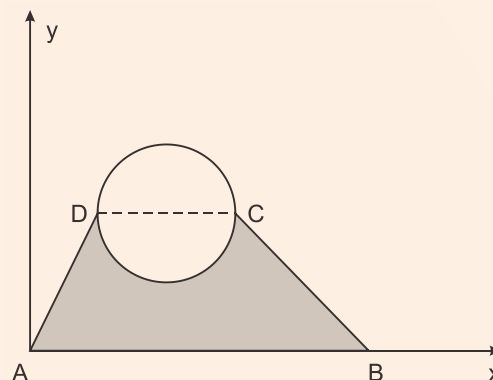


Quanto ele gastou comprando o piso para essa sala?

- A** R\$ 288,00
- B** R\$ 672,00
- C** R\$ 1.152,00
- D** R\$ 1.440,00
- E** R\$ 2.304,00

- 20** José quer calcular a área da região hachurada da figura abaixo, ela representa uma região localizada em seu sítio. O círculo representa um lago que tem 20 metros de diâmetro. Fixando-se um sistema de coordenadas conforme a

figura, sabe-se que o segmento AD está sobre a reta cuja equação é dada por  $y = 2x$  e que o segmento BC está sobre a reta cuja equação é  $y = -x + 50$ . Sabe-se ainda que CD é igual ao diâmetro do círculo e que a coordenada  $x$  do ponto D é igual a 10.



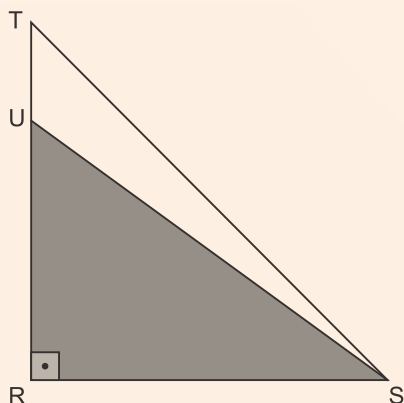
Assim, é CORRETO afirmar que a área da região, em metros quadrados, é igual a

- A** 700.
- B**  $700 - 50\pi$ .
- C**  $700 - 100\pi$ .
- D**  $700 - 200\pi$ .
- E**  $700 - 400\pi$ .

- 21** No triângulo MPQ, seja PH a altura relativa ao vértice P. O ponto H, no lado MQ, divide-o em dois segmentos cujas medidas são respectivamente 3 cm e 2 cm. Se a medida da altura (segmento PH) é 6 cm, então, a medida do ângulo interno do vértice P é igual a

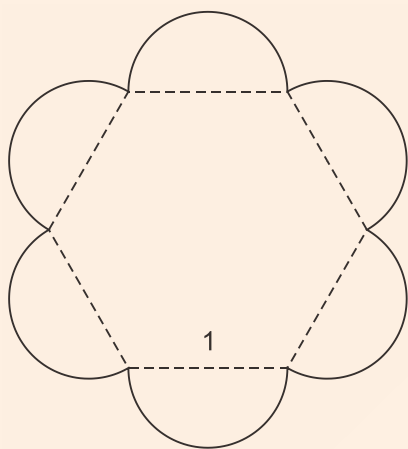
- A**  $45^\circ$ .
- B**  $30^\circ$ .
- C**  $60^\circ$ .
- D**  $50^\circ$ .

- 22** No triângulo SRT, representado a seguir, os lados RT e RS tem medidas iguais. Sabendo que o segmento RU mede 6 cm e o segmento ST mede  $8\sqrt{2}$  cm, a área do triângulo SRU é quantos por cento da área do triângulo SRT?



- A** 60%
- B** 70%
- C** 75%
- D** 80%
- E** 85%

- 23** | Uma pessoa desenhou uma flor construindo semicírculos sobre os lados de um hexágono regular de lado 1, como na figura abaixo.



A área dessa flor é

- A**  $\frac{3}{2} \left( \sqrt{3} + \frac{\delta}{2} \right)$ .
- B**  $\frac{3}{2} (\sqrt{3} + \delta)$ .
- C**  $\frac{3}{4} \left( \sqrt{3} + \frac{\delta}{2} \right)$ .
- D**  $\frac{3}{4} (\sqrt{3} + \delta)$ .

**E**  $\frac{3}{2} (\sqrt{3} + 2\delta)$ .

- 24** | Em uma aula de geometria, o professor passou a seguinte instrução:

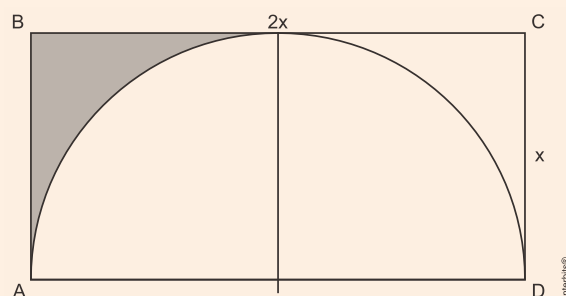
Desenhe um retângulo de lados 8 cm por 14 cm.

Nomeie os vértices desse retângulo de A, B, C e D, sendo que AB deve ser um dos menores lados. Determine o ponto médio do lado AB e nomeie esse ponto pela letra M. A partir do ponto M trace um segmento paralelo aos lados maiores e que tenha 3 cm de comprimento. Nomeie esse segmento de MN. Determine a área do triângulo NCD.

Natália e Mariana seguiram as instruções dadas, porém chegaram a resultados diferentes. Se o professor considerou corretas as duas soluções, a diferença, em  $\text{cm}^2$ , entre as áreas obtidas por Natália a Mariana foi

- A** 16
- B** 20
- C** 24
- D** 28

- 25** | O retângulo ABCD, representado a seguir, tem área cuja medida é de  $18 \text{ cm}^2$ . Qual é a razão entre a medida da área da parte pintada e a medida da área total do retângulo? Considere  $\delta = 3,0$ .



- A**  $\frac{1}{4}$
- B**  $\frac{1}{5}$
- C**  $\frac{1}{6}$



**D**  $\frac{1}{7}$

**E**  $\frac{1}{8}$

- 26|** Considere a circunferência com centro no ponto  $O$  e cuja medida do raio é 2 m. Se  $AB$  é um diâmetro desta circunferência e  $C$  é um ponto sobre a circunferência tal que a medida do ângulo  $C\hat{O}B$  é  $60^\circ$ , então, a medida da área da região interior à circunferência, limitada pela corda  $AC$  e pelo menor arco determinado por  $A$  e  $C$ , é

**A**  $\frac{4\delta}{6} - \sqrt{3}$

**B**  $\frac{4\delta}{6} + \sqrt{3}$

**C**  $\frac{4\delta}{3} - \sqrt{3}$

**D**  $\frac{4\delta}{3} + \sqrt{3}$

- 27|** Em torno de um canteiro retangular de 12 m de comprimento por 8 m de largura, pretende-se construir uma calçada. Qual deve ser a largura máxima dessa calçada, se o material disponível só é suficiente para cimentar uma área de  $69 \text{ m}^2$ ?

**A** 1,0 m

**B** 1,5 m

**C** 2,0 m

**D** 2,5 m

**E** 3,0 m

- 28|** Em muitas igrejas e casas antigas de Porto Alegre, podemos observar janelas de forma retangular encimadas por um semicírculo, como na figura.



Considerando que a parte retangular da figura possui  $x$  cm na base e altura correspondente a uma vez e meia essa medida, a função em que  $A = f(x)$  e que determina a área total da janela, em  $\text{cm}^2$ , é

**A**  $1,5x^2 + \delta r^2$

**B**  $(1,5 + \delta)x^2$

**C**  $1,5x^2 + \frac{\delta}{8}$

**D**  $\left(1,5 + \frac{\delta}{8}\right)x^2$

**E**  $1,5 + \frac{\delta}{8}x^2$

- 29|** A área do triângulo de vértices  $A(4, 5)$ ,  $B(1, 2)$  e  $C(3, 2)$  é:

**A** 2

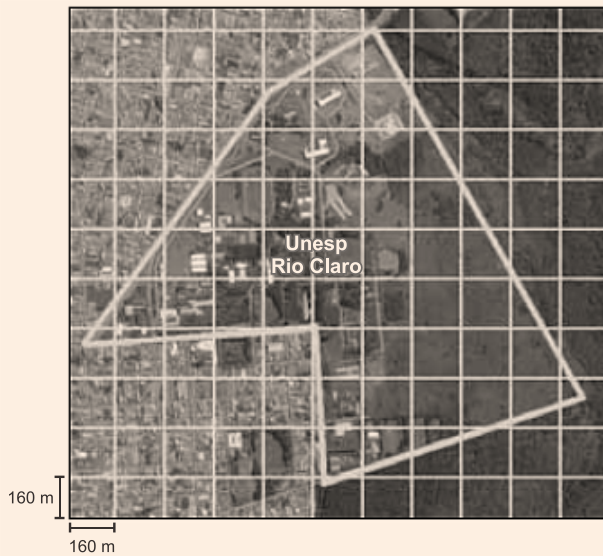
**B** 3

**C** 4

**D** 5

**E** 6

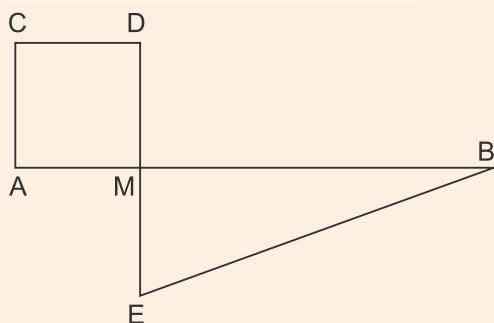
- 30|** O hexágono marcado na malha quadriculada sobre a fotografia representa o contorno do câmpus da Unesp de Rio Claro, que é aproximadamente plano.



A área aproximada desse câmpus, em  $\text{km}^2$ , é um número pertencente ao intervalo

- A**  $[0,8; 1,3[$
- B**  $[1,8; 2,3[$
- C**  $[2,3; 2,8[$
- D**  $[1,3; 1,8[$
- E**  $[0,3; 0,8[$

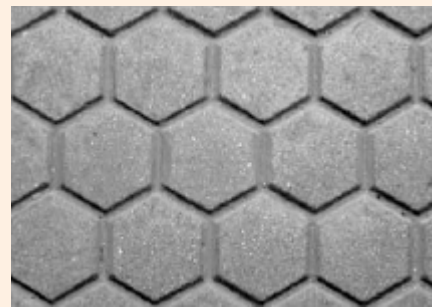
- 31** | Considere  $\overline{AB}$  um segmento de comprimento 10 e  $M$  um ponto desse segmento, distinto de  $A$  e de  $B$ , como na figura abaixo. Em qualquer posição do ponto  $M$ ,  $AMDC$  é quadrado e  $BME$  é triângulo retângulo em  $M$ .



Tomando  $x$  como a medida dos segmentos  $\overline{AM}$  e  $\overline{EM}$ , para que valor(es) de  $x$  as áreas do quadrado  $AMDC$  e do triângulo  $BME$  são iguais?

- A**  $0$  e  $\frac{10}{3}$ .
- B**  $0,2$  e  $3$ .
- C**  $\frac{10}{3}$ .
- D**  $0, \frac{10}{3}$  e  $10$ .
- E**  $5$ .

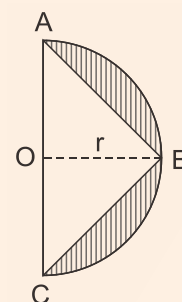
- 32** | Rafael decidiu colocar cerâmicas com a forma de hexágonos regulares no piso da sala de seu escritório. Sabendo que a área do piso do escritório mede  $25,5 \text{ m}^2$ , que a cerâmica mede  $10 \text{ cm}$  de lado, desconsiderando a área ocupada pelos rejuntas, quantas pedras de cerâmica serão necessárias para cobrir todo o piso dessa sala?



Considere  $\sqrt{3} = 1,7$ .

- A** 225
- B** 425
- C** 765
- D** 1.000
- E** 1.250

33. (Eear 2017)

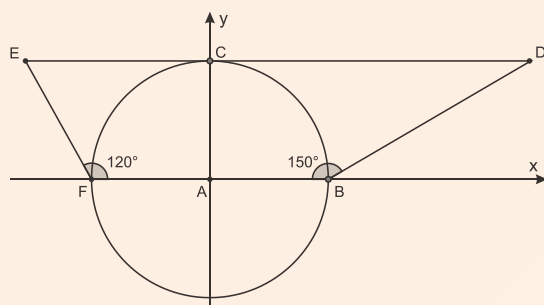




Na figura, O é o centro do semicírculo de raio  $r = 2$  cm. Se A, B e C são pontos do semicírculo e vértices do triângulo isósceles, a área hachurada é \_\_\_\_  $\text{cm}^2$ . (Use  $\delta \cong 3,14$ )

- A** 2,26
- B** 2,28
- C** 7,54
- D** 7,56

- 34** Os pontos B e F são extremidades da circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 81$  e o segmento DE é tangente à circunferência dada no ponto C(0, 9).

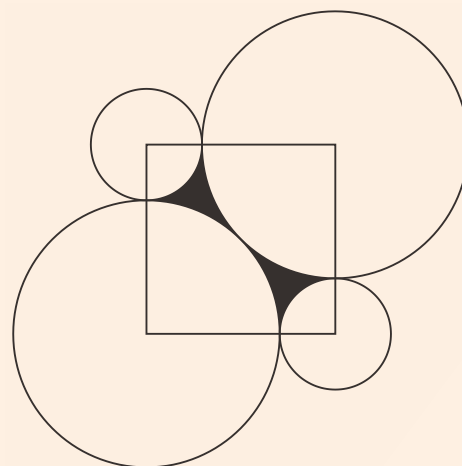


No trapézio BDEF o ângulo F mede  $120^\circ$  e o ângulo B mede  $150^\circ$ , conforme mostra a figura.

A área do trapézio BDEF vale

- A**  $27(3\sqrt{3} - 1)$
- B**  $54(2\sqrt{3} - 1)$
- C**  $27(2\sqrt{3} + 3)$
- D**  $54(\sqrt{3} + 3)$

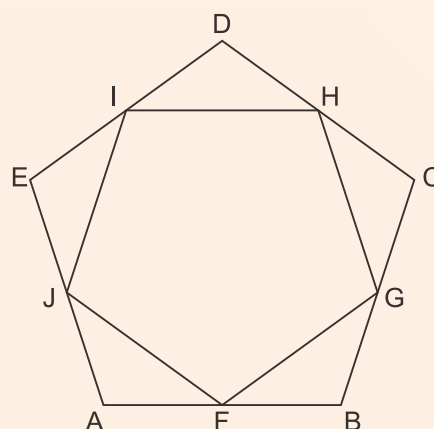
- 35** Considere um quadrado de lado 1. Foram construídos dois círculos de raio R com centros em dois vértices opostos do quadrado e tangentes entre si; dois outros círculos de raio r com centros nos outros dois vértices do quadrado e tangentes aos círculos de raio R, como ilustra a figura abaixo.



A área da região sombreada é

- A**  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)\delta$ .
- B**  $(\sqrt{2} - 1)\delta$ .
- C**  $1 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\delta$ .
- D**  $1 + (\sqrt{2} - 1)\delta$ .
- E**  $1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\delta$ .

- 36** Considere um pentágono regular ABCDE de lado 1. Tomando os pontos médios de seus lados, constrói-se um pentágono FGHIJ, como na figura abaixo.



A medida do lado do pentágono FGHIJ é

- A**  $\sin 36^\circ$ .



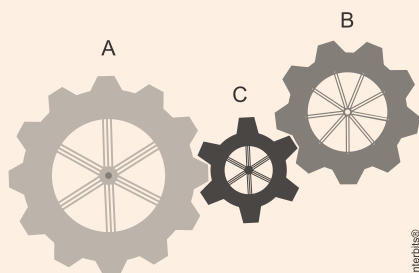
**B**  $\cos 36^\circ$ .

**C**  $\frac{\sin 36^\circ}{2}$ .

**D**  $\frac{\cos 36^\circ}{2}$ .

**E**  $2 \cos 36^\circ$ .

- 37** Num sistema de engrenagens, cada uma tem seu raio, de forma que a engrenagem "A" tem raio com medida R; a "B" tem raio com medida igual à metade do raio da engrenagem "A", e a "C" tem raio com medida igual a um quarto do raio da engrenagem "A". Sendo a medida do raio de "A" igual a 4 cm, quantas voltas "A" dará, quando "C" percorrer o equivalente a 3.600 cm?



**A** 2.400

**B** 1.200

**C** 600

**D** 300

**E** 150

- 38** Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

**A** 63 cm.

**B** 12,6 m.

**C** 6,3 km.

**D** 12,6 km.

**E** 63 km.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.

Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.

Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

<<http://tinyurl.com/zh8daj6>> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

- 39** O texto afirma que os habitantes das áreas próximas às da população de cigarras da Ninhada II talvez tenham que retirá-las do caminho. Imagine que 30 bilhões dessas cigarras ocupem totalmente uma estrada em formato retangular, com 10 metros de largura. Nesse cenário hipotético, as cigarras estariam posicionadas lado a lado, sem sobreposição de indivíduos.

Considerando que a área ocupada por uma cigarra dessa espécie é igual a  $7 \times 10^{-4}$  metros quadrados, então N quilômetros dessa estrada ficarão ocupados por essa população.

O menor valor de N será igual a



- A** 2,1
- B** 21
- C** 210
- D** 2.100
- E** 21.000

## GABARITO

### 01| C

Do triângulo BCD, temos

$$x + 70^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 50^\circ.$$

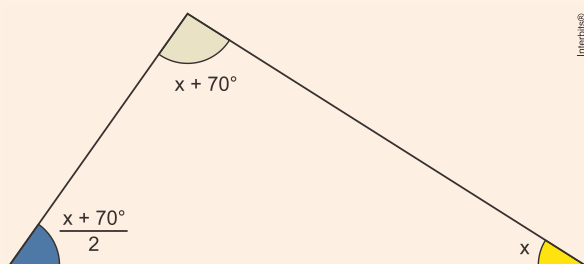
Logo, vem  $\widehat{DBA} = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$  e, portanto, segue que

$$y - x = 75^\circ - 50^\circ = 25^\circ = \frac{x}{2}.$$

Em consequência, a resposta é

### 02| D

De acordo com as informações do problema e considerando que  $\widehat{ACB} = x$ , temos:



$$x + 70^\circ + \frac{x + 70^\circ}{2} + x = 180^\circ$$

$$2x + 140^\circ + x + 70^\circ + 2x = 360^\circ$$

$$5x = 150^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

Portanto, as medidas dos ângulos são:

$$x = 30^\circ$$

$$\frac{x + 70^\circ}{2} = \frac{30^\circ + 70^\circ}{2} = 50^\circ$$

$$x + 70^\circ = 100^\circ$$

### 03| D

Desde que  $\overline{WZ} = \overline{ZE}$  e  $\widehat{WZE} = \widehat{WZY} + \widehat{YZE} = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ , temos

$$\widehat{WE} \equiv \widehat{ZEW} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

Ademais, sendo congruentes por LAL os triângulos WZE e XYE, vem  $\widehat{YEX} \equiv \widehat{ZEW} = 15^\circ$ . Portanto, o resultado é igual a

$$\begin{aligned} \widehat{XEW} &= \widehat{YEX} - 2 \cdot \widehat{ZEW} \\ &= 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ \\ &= 30^\circ. \end{aligned}$$

### 04| B

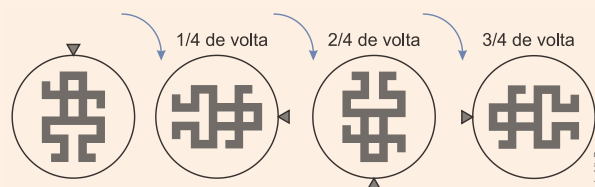
Pelo Teorema do Ângulo Externo aplicado no triângulo ACD, temos

$$\begin{aligned} \widehat{ADE} &= \widehat{CAD} + \widehat{DCA} \\ &= \hat{a} + 40^\circ. \end{aligned}$$

Logo, aplicando novamente o teorema no triângulo ADE, vem

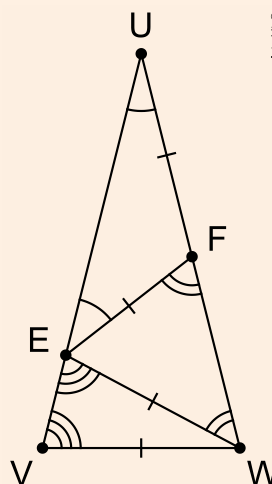
$$\begin{aligned} \widehat{AEB} = \widehat{ADE} + \widehat{DAE} &\Leftrightarrow 70^\circ = \hat{a} + 40^\circ + \hat{a} \\ &\Leftrightarrow \hat{a} = 15^\circ. \end{aligned}$$

### 05| 'E



### 06| C

Considere a figura:







Se  $\overline{EF} = \overline{FU}$ , então o triângulo  $EFU$  é isósceles de base  $EU$ . Daí, tomando  $\angle UFE \equiv \angle UEF = \theta$ , pelo Teorema do Ângulo Externo, vem  $\angle EFW = 2\theta$ . Ademais,  $\overline{EF} = \overline{EW}$  implica em  $EFW$  isósceles de base  $FW$  e, assim, temos  $\angle WFE = 2\theta$ .

Tomando o triângulo  $EUW$ , pelo Teorema do Ângulo Externo, concluímos facilmente que  $\angle VEW = 3\theta$ . Portanto, sendo  $\overline{VW} = \overline{EW}$  e  $\overline{VU} = \overline{WU}$ , temos  $\angle UVW \equiv \angle VWU = 3\theta$ .

Finalmente, do triângulo  $UVW$ , encontramos

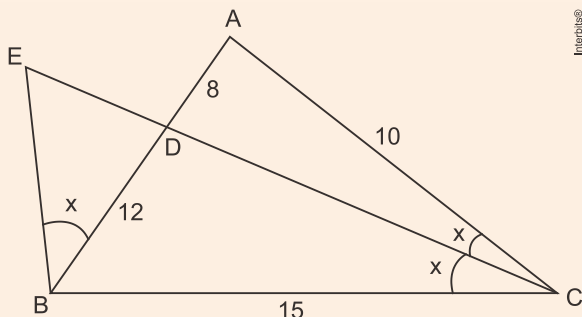
$$\theta + 3\theta + 3\theta = 180^\circ \Leftrightarrow \theta = \frac{180^\circ}{7}.$$

Em consequência, temos

$$25^\circ = \left(\frac{175}{7}\right)^\circ < \angle UVW < \left(\frac{182}{7}\right)^\circ = 26^\circ < 27^\circ.$$

### 07 | E

Pelo teorema das bissetrizes pode-se encontrar as medidas dos segmentos  $AD$  e  $DB$ . Assim, desenhando a figura, tem-se:



Calculando (teorema de Stewart):

$$15^2 \cdot 8 + 10^2 \cdot 12 = 20 \cdot (\overline{DC}^2 + 12 \cdot 8) \Rightarrow \overline{DC}^2 = 54 \Rightarrow \overline{DC} = 3\sqrt{6}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{ED} \cdot \overline{DC}$$

$$8 \cdot 12 = \overline{ED} \cdot 3\sqrt{6} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} = \frac{16\sqrt{6}}{3} + 3\sqrt{6} \Rightarrow \overline{EC} = \frac{25\sqrt{6}}{3}$$

### 07 | A

Sabendo que um dodecágono possui doze lados, temos

$$\frac{12 \cdot (12 - 3)}{2} + 12 = 66.$$

### 09 | E

Desde que os losangos  $FGCE$  e  $ABCD$  são semelhantes, temos

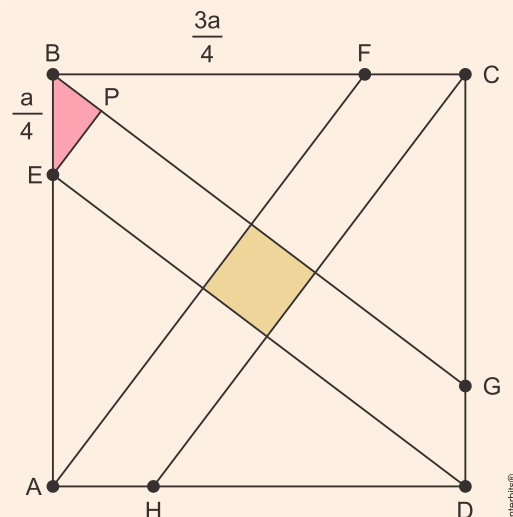
$$\frac{(FGCE)}{(ABCD)} = \frac{1}{2} = k^2, \text{ com } k \text{ sendo a razão de semelhança.}$$

Por conseguinte, dado que  $\overline{AB} = 6\text{cm}$ , vem

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{FG} = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

### 10 | A

Pode-se desenhar, segundo o enunciado:



$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = \frac{3a}{4}$$

$$\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{AH} = \frac{a}{4}$$

$$\triangle AED \equiv \triangle BFA \equiv \triangle CGB \equiv \triangle DHC$$

Quadrilátero amarelo  $\rightarrow$  quadrado de lado  $x$

$$\frac{\overline{PE}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \rightarrow \frac{x}{a/4} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2}} \rightarrow x = \frac{a}{5} \rightarrow \text{Área} = x^2 = \frac{a^2}{25}$$

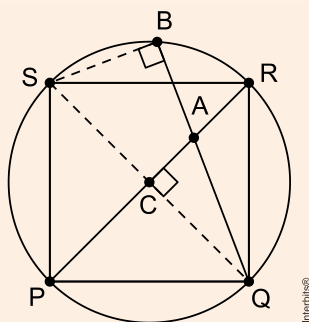
### 11 | C

Sendo  $DE \parallel BC$ , tem-se que os triângulos  $ABC$  e  $ADE$  são semelhantes por AA. Portanto, segue que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{4}{12} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y = 3x.$$

**12| C**

Considere a figura, em que  $\ell$  é a medida do lado do quadrado PQRS.



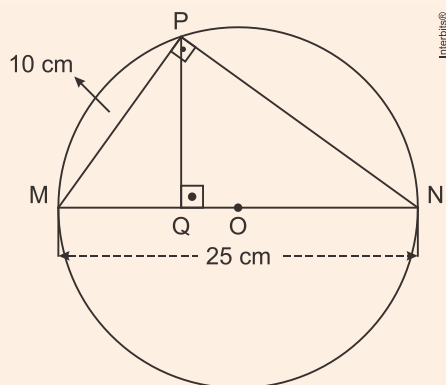
É fácil ver que os triângulos BQS e CQS são semelhantes por AA. Ademais, como  $\overline{QS} = \ell\sqrt{2}$  cm e C é ponto médio de QS, temos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{QC}}{\overline{QB}} &= \frac{\overline{QA}}{\overline{QS}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\ell\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{6}{\ell\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \ell^2 &= 60 \\ \Rightarrow \ell &= 2\sqrt{15} \text{ cm.}\end{aligned}$$

**13| B**

Seja  $2p$  o perímetro desejado. Como os triângulos são semelhantes e o perímetro do primeiro triângulo é igual a  $13+14+15=42$  cm, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{2p}{42}\right)^2 &= \frac{336}{84} \Leftrightarrow \left(\frac{2p}{42}\right)^2 = 4 \\ \Rightarrow 2p &= 84 \text{ cm.}\end{aligned}$$

**14| E**

Considerando que todo triângulo inscrito numa se-

micircunferência, com lado coincidindo com o diâmetro, é retângulo. Temos:

$$\begin{aligned}PM^2 &= 25 \cdot MQ \\ 10^2 &= 25 \cdot MQ \Rightarrow MQ = 4. \\ PQ^2 &= MQ \cdot QN \\ PQ^2 &= 4 \cdot (25 - 4) \\ PQ^2 &= 84 \\ PQ &= 2\sqrt{21}\end{aligned}$$

**15| A**

Considere um triângulo equilátero de lado  $a$ , com perímetro 3 cm e inscrito numa circunferência de raio  $R$ .

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

Portanto, a área do círculo será dada por:

$$A = \delta \cdot R^2 \Rightarrow A = \delta \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{\delta}{3} \text{ cm}^2$$

**16| A**

Calculando:

6, 8, 10  $\Rightarrow$  Pitagórico

$$10 \cdot h = 6 \cdot 8 \Rightarrow h = \frac{24}{5}$$

$$\Delta AMB \Rightarrow 6^2 = h^2 + (5 - \overline{MN})^2 \Rightarrow 36 = \frac{576}{25} + 25 - 10\overline{MN} + \overline{MN}^2 \Rightarrow \overline{MN} = 1,4$$

$$S_{\Delta AMN} = \frac{\overline{MN} \cdot h}{2} = \frac{1,4 \cdot \frac{24}{5}}{2} \Rightarrow S_{\Delta AMN} = 3,36$$

**17| D**

Seja  $b$  a medida do outro cateto. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos

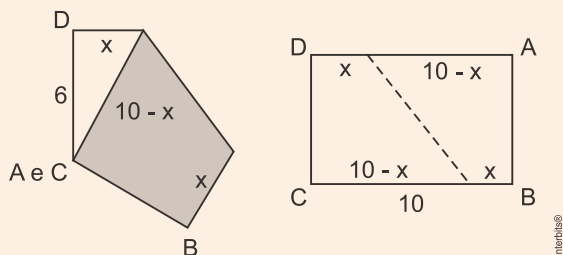
$$b^2 = 12^2 - 4^2 \Rightarrow b = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

A resposta é dada por

$$\frac{4 \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

**18| B**

Abrindo-se novamente a folha de papel, tem-se:



Assim, pode-se escrever:

$$\left. \begin{array}{l} B_{\text{maior}} = 10 - x \\ b_{\text{menor}} = x \\ h = 6 \end{array} \right\} S = \frac{(10 - x + x) \cdot 6}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

### 19| D

Calculando:

$$S_{\text{sala}} = S_{\text{AFEB}} + S_{\text{BEDC}} = 4 \cdot 6 + \frac{4+2}{2} \cdot 2 \rightarrow S_{\text{sala}} = 30 \text{ m}^2$$

$$\text{Custo} = 30 \cdot 48 = 1440 \text{ reais}$$

### 20| B

Tem-se que

$$D = (10, 2 \cdot 10) = (10, 20)$$

e

$$C = (10 + 20, -(10 + 20) + 50) = (30, 20).$$

Ademais, sendo  $y_B = 0$ , vem

$$0 = -x_B + 50 \Leftrightarrow x_B = 50.$$

Portanto, segue que o resultado é dado por

$$\frac{1}{2} \cdot (50 + 20) \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \left( \frac{20}{2} \right)^2 = (700 - 50\delta) \text{ m}^2.$$

### 21| A

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo MHP, temos

$$\overline{MP}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{HP}^2 \Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 3^2 + 6^2 \\ \Rightarrow \overline{MP} = 3\sqrt{5} \text{ cm.}$$

Ademais, do triângulo QHP, encontramos

$$\overline{QP}^2 = \overline{QH}^2 + \overline{HP}^2 \Leftrightarrow \overline{QP}^2 = 2^2 + 6^2 \\ \Rightarrow \overline{QP} = 2\sqrt{10} \text{ cm.}$$

Portanto, observando que  $\overline{MP} > \overline{MQ}$ , vem

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{QP} \cdot \sin \hat{MPQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MQ} \cdot \overline{PH} \Leftrightarrow 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sin \hat{MPQ} = 5 \cdot 6$$

$$\Leftrightarrow \sin \hat{MPQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{MPQ} = 45^\circ.$$

### 22| C

$$RS^2 + RT^2 = (8\sqrt{2})^2 \Rightarrow RS^2 + RS^2 = 128 \Rightarrow RS^2 = 64 \Rightarrow RS = 8$$

Portanto, a razão entre as áreas dos triângulos será dada por:

$$\frac{A_{\text{SRU}}}{A_{\text{SRT}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6}{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8} = \frac{6}{8} = 0,75 = 75\%$$

### 23| A

A área A da figura é igual a soma das áreas de

um hexágono de lado 1 com 3 círculos de raio  $\frac{1}{2}$ .

$$A = 6 \cdot \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \delta \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$A = \frac{3}{2} \cdot \left( \sqrt{3} + \frac{\delta}{2} \right)$$

### 24| C

Desde que o ponto N pode ser interno ou externo ao retângulo ABCD, temos

$$\frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2.$$

### 25| E

Calculando:

Raio = x

$$S_{\text{semicirc}} = \frac{\delta R^2}{2} = \frac{\delta x^2}{2} \approx \frac{3x^2}{2}$$

$$S_{\text{retâng}} = 2x \cdot x = 2x^2$$

$$S_{\text{chachurada}} = \frac{S_{\text{retâng}}}{2} - \frac{S_{\text{semicirc}}}{2} = \frac{2x^2}{2} - \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4x^2 - 3x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

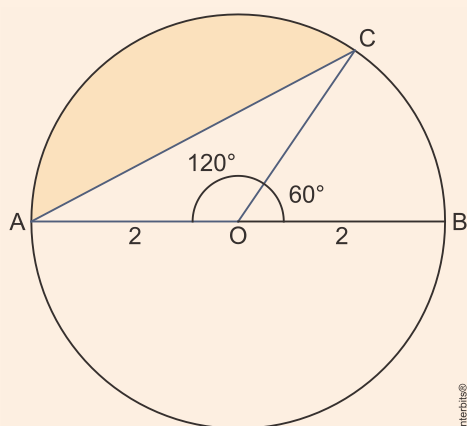
$$\frac{S_{\text{chachurada}}}{S_{\text{retâng}}} = \frac{\frac{x^2}{4}}{2x^2} = \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{2x^2} \Rightarrow \frac{S_{\text{chachurada}}}{S_{\text{retâng}}} = \frac{1}{8}$$

### 26| C

De acordo com as informações do enunciado,



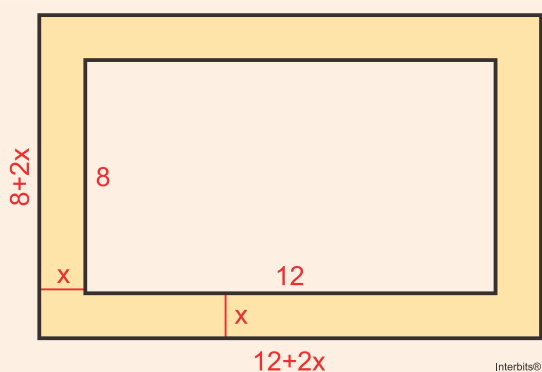
a área pedida corresponde à região destacada na figura abaixo, ou seja, a área de um segmento circular de  $120^\circ$ .



$$A = \frac{\theta \cdot r^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{4\theta}{3} - \sqrt{3}.$$

**27| B**

Seja  $x$  a largura da calçada, pode-se desenhar:



Calculando:

$$S_{\text{calçada}} = 69 \text{ m}^2 = ((8+2x) \cdot (12+2x)) - 8 \cdot 12 \Rightarrow 69 = 96 + 16x + 24x + 4x^2 - 96$$

$$0 = 4x^2 + 40x - 69$$

$$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-69) = 2704$$

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{2704}}{2 \cdot 4} = \frac{-40 \pm 52}{8} \Rightarrow \begin{cases} x' = -11,5 \text{ (não convém)} \\ x'' = 1,5 \text{ m} \end{cases}$$

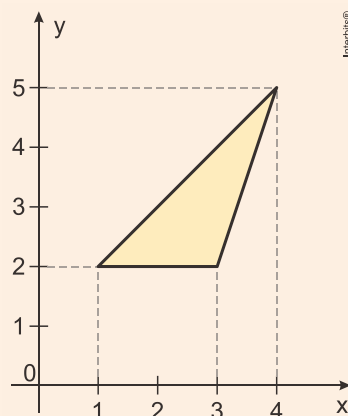
**28| D**

Se a altura do retângulo é  $1,5x$ , então a resposta é

$$+ \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left( + \frac{\theta}{8} \right)^2$$

**29| B**

Desenhando o triângulo no plano cartesiano:



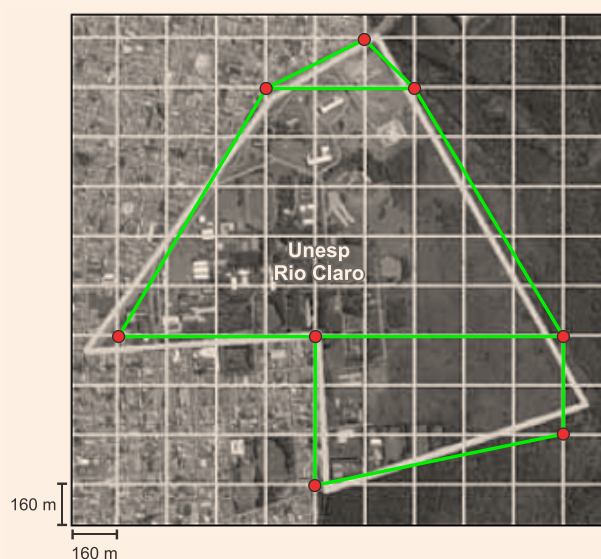
Assim, percebe-se que o mesmo tem altura 3 e base 2. Assim, pode-se escrever:

$$S = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

**30| A**

Seja  $u$  a unidade de área da malha, de tal modo que

$$1u = 160^2 = 25.600 \text{ m}^2 = 0,0256 \text{ km}^2.$$



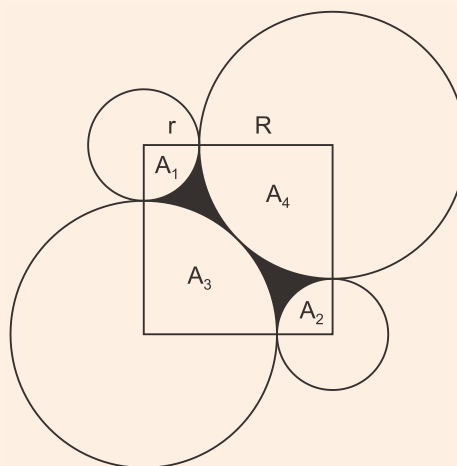
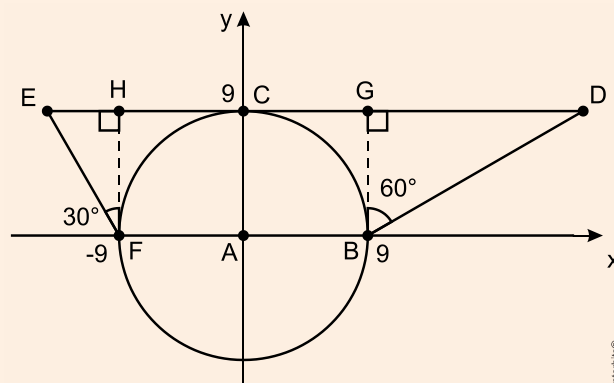
Dividindo o hexágono em um triângulo e dois trapézios, como indicado acima, segue que a área aproximada desse polígono é dada por

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 1}{2} + \left(\frac{9+3}{2}\right) \cdot 5 + \left(\frac{3+2}{2}\right) \cdot 5 &= 44u \\ &= 44 \cdot 0,0256 \\ &\approx 1,1 \text{ km}^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos  $1,1 \in [0,8; 1,3]$ .



Considere a figura.





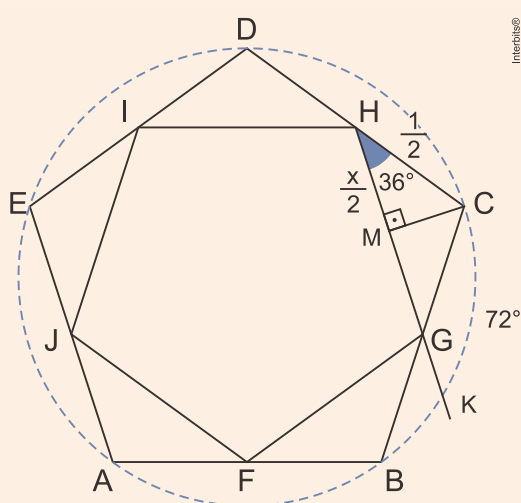
$$A = 1^2 - (A_1 + A_2) - (A_3 + A_4)$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \left( \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4} + \frac{2}{4} \right)$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$$A = 1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \delta.$$

**36| B**

Considerando a circunferência circunscrita no pentágono regular, concluímos que:

$$\widehat{GHC} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

Admitindo que  $x$  seja a medida do lado pedido e considerando o triângulo HMC, podemos escrever que:

$$\cos 36^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = x$$

Portanto,

$$x = \cos 36^\circ$$

**37| E**

Considerando  $n$  o número de voltas da engrenagem A e  $2 \cdot \delta \cdot 4 = 8\delta$  a distância percorrida por um de seus pontos quando esta engrenagem executa uma volta, temos:

$$n \cdot 8\delta = 3600 \Rightarrow n = \frac{3600}{8\delta} \Rightarrow n \approx 150$$

**38| B**

Seja  $r$  a medida do raio da Terra na linha do Equador, em metros. Tem-se que a distância percorrida pelo topo da cabeça da pessoa é igual a

$$2\delta \cdot (r + 2) \approx (2\delta \cdot r + 12,6) \text{ m.}$$

Em consequência, sendo  $2\delta \cdot r$  a distância percorrida pela sola dos pés da pessoa, podemos concluir que o resultado é 12,6 m.

**39| D**

Área ocupada por 30 bilhões de cigarras:

$$30 \cdot 10^9 \cdot 7 \cdot 10^{-4} = 210 \cdot 10^5 \text{ m}^2.$$

O comprimento  $N$  da estrada será dado por:

$$10 \cdot n = 210 \cdot 10^5$$

$$n = 2.100.000 \text{ m}$$

$$n = 2.100 \text{ km}$$



## ANÁLISE COMBINATÓRIA

04

**01** Um aluno do Instituto Federal de Alagoas (IFAL), deseja praticar dois esportes, durante o ano letivo de 2017. Sabendo que o IFAL oferece os esportes: futebol de campo, futsal, voleibol de quadra, voleibol de praia, handebol, basquete e judô, de quantas maneiras esse aluno pode fazer sua escolha?

- A** 14.
- B** 21.
- C** 42.
- D** 49.
- E** 128.

**02** Cada uma das 12 pessoas inscritas para participar de um trabalho voluntário recebeu um crachá com um número de identificação distinto – de 1 a 12 – de acordo com a ordem de inscrição.

Desejando-se organizar grupos formados por três pessoas que não estejam identificadas por três números consecutivos, o número máximo possível de grupos distintos que se pode formar é

- A** 230
- B** 225
- C** 220
- D** 215
- E** 210

**03** Oito amigos decidiram brincar de telefone. Para isso, dispuseram-se em um terreno de modo que cada um estivesse no vértice de um octógono regular de lado medindo 20 metros, conforme figura 1.

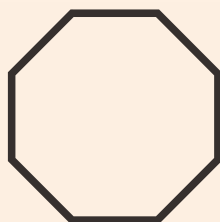


Figura 1

Decidiram montar os telefones utilizando barbante e copos descartáveis, conforme figura 2.



Figura 2

Disponível em: <<http://www.beaba.com.br/brincadeira-infantil-telefone-sem-fio/>>. Acesso: 05 de out. 2016.

Disponível em: <<http://www.beaba.com.br/brincadeira-infantil-telefone-sem-fio/>>. Acesso: 05 de out. 2016.

Cada telefone, que é intransferível, liga apenas dois dos amigos e é formado por dois copos, que não podem estar em dois telefones simultaneamente, e um barbante. Para que todos possam falar com todos através de um telefone desses, incluindo os amigos em vértices consecutivos, quantos telefones eles precisarão confeccionar?

- A** 20
- B** 28
- C** 12
- D** 10
- E** 8

**04** Cinco cursos do IFAL CAMPUS-MACEIÓ resolveram fazer um torneio de futebol, onde cada time de cada curso joga contra os demais times apenas uma vez. Quantos serão os jogos nesse torneio?

- A** 5.
- B** 6.
- C** 8.
- D** 9.
- E** 10.





**05** | O coordenador de Matemática do campus Recife conta com 7 professores para lecionar aulas em um programa do PROIFPE. São aulas semanais e a cada semana um novo trio de professores é selecionado para ministrá-las.

Considerando um mês equivalente a 4 semanas, em quanto tempo esse programa estará finalizado

- A** 6 meses.
- B** 4 meses e 1 semana.
- C** 1 ano, 8 meses e 2 semanas.
- D** 2 anos e 3 meses.
- E** 8 meses e 3 semanas.

**06** | Em uma competição de vôlei de praia participaram  $n$  duplas. Ao final, todos os adversários se cumprimentaram uma única vez com apertos de mãos. Sabendo-se que foram contados 180 apertos de mãos, podemos concluir que  $n$  é igual a:

- A** 8
- B** 9
- C** 10
- D** 11
- E** 12

**07** | Um grupo é formado por oito homens e cinco mulheres. Deseja-se dispor essas oito pessoas em uma fila, conforme figura abaixo, de modo que as cinco mulheres ocupem sempre as posições 1, 2, 3, 4 e 5, e os homens as posições 6, 7 e 8.



figura ilustrativa – fora de escala

Interbits®

Quantas formas possíveis de fila podem ser formadas obedecendo a essas restrições?

- A** 56
- B** 456
- C** 40.320
- D** 72.072
- E** 8.648.640

**08** | Quantos são os números naturais pares formados com quatro dígitos que têm pelo menos dois dígitos iguais?

- A** 2.204.
- B** 2.468.
- C** 2.096.
- D** 2.296.

**09** | Considere a sequência infinita IFALMIFALMIFALMIFALMIFALM...

Qual é a 2017ª letra dessa sequência?

- A** I.
- B** F.
- C** A.
- D** L.
- E** M.

**10** | Um *pixel* é o menor elemento de uma imagem digital e, em casos de imagens coloridas, é composto por um conjunto de 3 pontos: vermelho, verde e azul. Cada um desses pontos é capaz de exibir 256 tonalidades distintas. Combinando tonalidades desses três pontos, quantas cores diferentes podem ser exibidas?

- A**  $3^{256}$
- B**  $3 \cdot 256$
- C**  $256^3$
- D** 256
- E**  $27 \cdot 256$

**11** | Quantos números inteiros positivos pares, com três dígitos distintos, podemos formar com os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7?

- A** 24.
- B** 28.
- C** 32.
- D** 36.



**12|** Os números 258 e 179 têm seus algarismos escritos em ordem crescente. Os números 558 e 496 não têm seus algarismos escritos em ordem crescente. Quantos são os números de três algarismos no qual esses algarismos aparecem em ordem crescente?

- A** 84
- B** 120
- C** 504
- D** 720

**13|** O total de números de cinco algarismos que possuem pelo menos dois dígitos consecutivos iguais em sua composição é igual a

- A** 6.581.
- B** 9.590.
- C** 18.621.
- D** 27.930.
- E** 30.951.

**14|** Um patrão tem 6 tarefas diferentes para serem distribuídas entre 3 empregados. Ele pode delegar todas elas a um só empregado, ou delegar apenas para alguns, ou ainda garantir que cada empregado receba pelo menos uma tarefa. O número de maneiras distintas de distribuir essas tarefas é

- A** 639
- B** 714
- C** 729
- D** 864

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

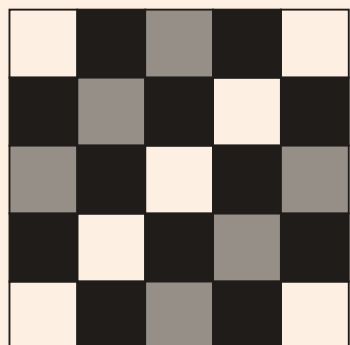
Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um <sup>1</sup>pixel na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada pixel, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza intermediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

<sup>1</sup>Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 pixels de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

**15|** O número máximo de matrizes distintas que podem ser formadas com 25 pixels de tamanho, em que se possa preencher cada pixel com qualquer uma dentre as 256 cores da escala de cinza, é igual a

- A**  $255^{256}$
- B**  $127^{25}$
- C**  $25^{25}$
- D**  $256^{25}$
- E**  $0^{256}$

## GABARITO

**01| B**

Basta aplicar a combinação de sete esportes agrupados dois a dois, logo:

$$\begin{aligned} C_{7,2} &= \frac{7!}{2!(7-2)!} \\ C_{7,2} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} \\ C_{7,2} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!5!} = 21 \end{aligned}$$

**02 | E**

De 1 até 12, temos 10 números consecutivos, pois o primeiro deles não pode ser o 11 e nem o 12.

Total de grupos formados por 3 pessoas:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$$

Portanto, o número máximo de grupos que se pode formar de modo que os crachás não sejam identificados por três números consecutivos será:

$$220 - 10 = 210.$$

**03 | B**

Basta obter a combinação de 8 dois a dois. Logo temos:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2!6!} = 28$$

**04 | E**

Para saber o número de jogos realizados basta aplicar uma combinação simples de cinco times agrupados dois a dois. Logo,

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10 \text{ jogos.}$$

**05 | E**

Como o campus possui sete professores e a cada aula três lecionam, basta aplicar a combinação de sete, três a três.

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = 35 \text{ semanas.}$$

Calculando em meses, basta dividir por quatro.

$$\frac{35}{4} = 8 \text{ meses e } 3 \text{ semanas.}$$

**06 | C**

Se todos os atletas se cumprimentassem, então o número

de apertos de mãos seria igual a  $\binom{2n}{2}$ . Mas, como apenas adversários se cumprimentam, devemos descontar desse total o número de apertos de mãos trocados entre atletas de uma mesma dupla, qual seja  $n$ .

Portanto, segue que o resultado é tal que

$$\begin{aligned} \binom{2n}{2} - n = 180 &\Rightarrow \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} - n = 180 \\ &\Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \\ &\Rightarrow n = 10. \end{aligned}$$

**07 | C**

figura ilustrativa – fora de escala

Interbits®

Permutando as mulheres nas cinco primeiras posições, temos:

$$P_5 = 5! = 120$$

Calculando todas as sequências de três homens possíveis, escolhidos em um total de 8, temos:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Portanto, o número de formas possíveis de fila que podem ser formadas e obedecendo a essas restrições são:

$$P = 120 \cdot 336 = 40.320$$

**08 | A**

Existem  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$  números naturais pares de quatro algarismos distintos ou não. Portanto, como há  $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$  pares com algarismos distintos que terminam em zero, e  $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1792$  pares com algarismos distintos que não terminam em zero, podemos concluir que a resposta é  $4500 - 504 - 1792 = 2204$ .

**09 | B**

Observamos que as letras I, F, A, L, M, se repetem nesta ordem continuamente. Para obter a 2017ª posição, basta dividir 2017 por 5 e seu resto indicará a qual das cinco letras está relacionada. Dividindo:

$$\begin{array}{r} 2017 \div 5 \\ 2 \quad 403 \end{array}$$

Visto que o resto é dois, basta procurar a letra que ocupa a segunda posição da sequência I, F, A, L, M. Desta maneira, a letra da 2017ª posição é a letra F.

**10 | C**

Como são três pontos e cada ponto possui 256 toneladas temos:  $256 \times 256 \times 256 = 256^3$  cores.

**11 | A**

Para a última casa decimal, temos 2 possibilidades (4 ou 6), já que o número é par. Como o número é formado por algarismos distintos temos 4 possibilidades para a primeira casa decimal e 3 possibilidades para a segunda casa decimal. Portanto, o total de números inteiros positivos que podemos formar será dada por:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

**12 | A**

Existem  $7 + 6 + \dots + 1 = 28$  números que começam por 1,  $6 + 5 + \dots + 1 = 21$  números que começam por 2, e assim sucessivamente, até o número 789 que é o último número que apresenta os algarismos em ordem crescente.

Portanto, a resposta é  $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$ .

**13 | E**

Existem  $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$  números de cinco algarismos. Destes, temos  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049$  números que não apresentam quaisquer dígitos consecutivos. Portanto, segue que o resultado é  $90000 - 59049 = 30951$ .

**14 | C**

Como cada tarefa pode ser distribuída de três modos distintos, podemos concluir, pelo Princípio Multiplicativo, que o resultado é  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$ .

**15 | D**

Temos 25 espaços e cada um destes espaços podemos utilizar uma das 25 cores, portanto o número máximo de matrizes distintas que podem ser formados será dado por:  $25^6$ .

**01** Somando todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3 e 4, o resultado será igual a

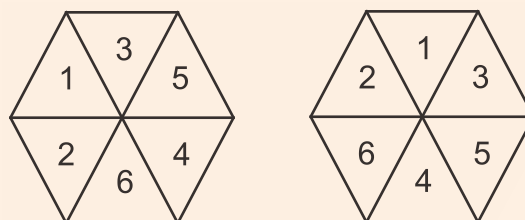
- A** 2.400.
- B** 2.444.
- C** 6.000.
- D** 6.600.
- E** 6.660.

**02** Para desbloquear a tela de um aparelho celular, o usuário deve digitar uma senha de três algarismos quaisquer. Note que também são válidas senhas, por exemplo, 088 ou 000. Se a pessoa digita duas vezes a senha errada, o mecanismo de segurança do aparelho trava a tela por uma hora.

Rafael esqueceu sua senha, mas lembra que ela formava um número que era: quadrado perfeito, menor do que 900 e múltiplo de 3. Usando corretamente suas três lembranças, as chances de Rafael conseguir desbloquear a tela do seu celular, sem que ela trave por uma hora, são iguais a

- A**  $\frac{2}{9}$ .
- B**  $\frac{2}{11}$ .
- C**  $\frac{3}{11}$ .
- D**  $\frac{1}{3}$ .
- E**  $\frac{1}{5}$ .

**03** Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.



- A** 12
- B** 24
- C** 36
- D** 48
- E** 96

**04** O polinômio  $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$  possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de  $c$  menores do que  $c$  é  $c^2$ . Qual é o valor de  $b$ ?

- A** 11
- B** 13
- C** 17
- D** 23
- E** 29



**05** | Estima-se que, em determinado país, o consumo médio por minuto de farinha de trigo seja 4,8 toneladas. Nessas condições, o consumo médio por semana de farinha de trigo, em quilogramas, será aproximadamente:

- A**  $4,2 \cdot 10^5$
- B**  $4,4 \cdot 10^6$
- C**  $4,6 \cdot 10^6$
- D**  $4,8 \cdot 10^7$
- E**  $5,0 \cdot 10^7$

**06** | A soma dos quatro algarismos distintos do número  $N = abcd$ , é 16. A soma dos três primeiros algarismos é igual ao algarismo da unidade e o algarismo do milhar é igual à soma dos algarismos da centena e da dezena. O produto dos algarismos da dezena e da centena é

- A** 4
- B** 3
- C** 2
- D** 1

**07** | Uma lanchonete vende três tipos de doce, conforme a tabela abaixo:

| Doce            | Valor Unitário |
|-----------------|----------------|
| Brigadeiro      | R\$ 1,00       |
| Bem-Casado      | R\$ 2,00       |
| Surpresa de Uva | R\$ 3,00       |

Maria está nessa lanchonete e vai gastar R\$ 10,00, comprando, pelo menos, um doce de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra de Maria?

- A** 10
- B** 8
- C** 6
- D** 4
- E** 3

**08** | Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma  $2^{k-1}(2m-1)$ , em que  $k$  e  $m$  são inteiros positivos.

II. Existe um número  $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$  de tal modo que os números  $a_1 = \sin x$ ,  $a_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $a_3 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  e  $a_4 = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  estejam, nesta ordem, em progressão geométrica.

III. Existe um número inteiro primo  $p$  tal que  $\sqrt{p}$  é um número racional.

é (são) verdadeira(s)

- A** apenas I.
- B** apenas II.
- C** apenas III.
- D** apenas I e II.
- E** todas.

**09** | Rodrigo estava observando o pisca-pisca do enfeite natalino de sua casa. Ele é composto por lâmpadas nas cores amarelo, azul, verde e vermelho. Rodrigo notou que lâmpadas amarelas acendem a cada 45 segundos, as lâmpadas verdes, a cada 60 segundos, as azuis, a cada 27 segundos, e as vermelhas só acendem quando as lâmpadas das outras cores estão acesas ao mesmo tempo. De quantos em quantos minutos, as lâmpadas vermelhas acendem?

- A** 6
- B** 9
- C** 12
- D** 15
- E** 18

**10** | Os números naturais de 0 a 3.000 foram dispostos, consecutivamente, conforme a figura, que mostra o começo do processo.

|          |   |   |   |   |  |   |   |   |    |    |  |    |    |  |    |    |    |     |  |
|----------|---|---|---|---|--|---|---|---|----|----|--|----|----|--|----|----|----|-----|--|
| 5ª linha |   |   |   | 4 |  |   |   |   |    | 12 |  |    |    |  |    | 20 |    |     |  |
| 4ª linha |   |   | 3 | 5 |  |   |   |   | 11 | 13 |  |    |    |  |    | 19 | 21 |     |  |
| 3ª linha |   |   | 2 |   |  | 6 |   |   | 10 |    |  | 14 |    |  | 18 |    |    | 22  |  |
| 2ª linha |   | 1 |   |   |  |   | 7 | 9 |    |    |  | 15 | 17 |  |    |    |    | ... |  |
| 1ª linha | 0 |   |   |   |  |   | 8 |   |    |    |  |    | 16 |  |    |    |    | ... |  |





Nessas condições, o número 2.017 está na

- A** 1ª linha.
- B** 2ª linha.
- C** 3ª linha.
- D** 4ª linha.
- E** 5ª linha.

**11** | Dividindo-se o número natural  $N$  por 13, obtém-se quociente  $Q$  e resto  $R$ . Aumentando-se 2 unidades no dividendo e mantendo-se o divisor, o quociente aumenta de 1 unidade e a divisão é exata.

Sabendo-se que  $Q + R = 16$ , podemos afirmar que os divisores primos de  $N$  são:

- A** 2 e 19
- B** 2, 3 e 13
- C** 3 e 17
- D** 3, 5 e 7
- E** 5 e 11

**12** | Um grupo de pesquisadores, composto por 6 médicos e seus 19 orientandos, recebeu, ao final de um projeto, como bonificação, uma quantia, em notas de R\$ 100,00, a ser dividida entre eles de tal modo que metade fosse dividida, igualmente, entre os médicos e a outra metade fosse dividida, igualmente, entre os orientandos.

Com base nessas informações, pode-se afirmar que a diferença entre os valores recebidos por um médico e um orientando foi, no mínimo, igual a

- A** R\$ 1.300,00
- B** R\$ 1.500,00
- C** R\$ 2.000,00
- D** R\$ 2.400,00
- E** R\$ 3.000,00

**13** | Sejam  $a$  e  $b$  dois números inteiros positivos. Diz-se que  $a$  e  $b$  são equivalentes se a soma dos divisores positivos de  $a$  coincide com a soma dos divisores positivos de  $b$ .

Constituem dois inteiros positivos equivalentes:

- A** 8 e 9.
- B** 9 e 11.
- C** 10 e 12.
- D** 15 e 20.
- E** 16 e 25.

**14** | O dono de uma papelaria comprou uma grande quantidade de canetas de dois tipos,  $A$  e  $B$ , ao preço de R\$ 20,00 e R\$ 15,00 a dúzia, respectivamente, tendo pago na compra o valor de R\$ 1.020,00. No total, ele saiu da loja com 777 canetas, mas sabe-se que, para cada três dúzias de um mesmo tipo de caneta que comprou, ele ganhou uma caneta extra, do mesmo tipo, de brinde.

Nas condições descritas, o total de dúzias de canetas do tipo  $B$  que ele comprou foi igual a

- A** 52.
- B** 48.
- C** 45.
- D** 41.
- E** 37.

**15** | Seja  $N$  um número natural de dois algarismos não nulos. Trocando-se a posição desses dois algarismos, obtém-se um novo número natural  $M$  de modo que  $N - M = 63$ .

A soma de todos os números naturais  $N$  que satisfazem as condições dadas é

- A** 156
- B** 164
- C** 173
- D** 187
- E** 198





**16|** Na última década do século XX, a perda de gelo de uma das maiores geleiras do hemisfério norte foi estimada em  $96 \text{ km}^3$ . Se  $1 \text{ cm}^3$  de gelo tem massa de 0,92 g, a massa de  $96 \text{ km}^3$  de gelo, em quilogramas, é

- A**  $8,832 \cdot 10^{12}$ .
- B**  $8,832 \cdot 10^{13}$ .
- C**  $8,832 \cdot 10^{14}$ .
- D**  $8,832 \cdot 10^{15}$ .
- E**  $8,832 \cdot 10^{16}$ .

**17|** A conta armada a seguir indica a adição de três números naturais, cada um com três algarismos, resultando em um número natural de quatro algarismos. Os algarismos que compõem os números envolvidos na conta, indicados pelas letras A, C, D e E, representam números primos distintos entre si.

$$\begin{array}{r} \text{AEC} \\ + \text{CDD} \\ \hline \text{EAE} \\ \hline \text{1CDC} \end{array}$$

Assim, o valor de  $E \cdot D + A \cdot C$  é igual a

- A** 35.
- B** 33.
- C** 31.
- D** 29.
- E** 27.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.

Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.

Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

<<http://tinyurl.com/zh8daj6>> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

**18|** Suponha a existência de uma espécie  $C_1$  de cigarras, emergindo na superfície a cada 13 anos, e de uma espécie  $C_2$  de cigarras, emergindo a cada 17 anos.

Se essas duas espécies emergirem juntas em 2016, elas emergirão juntas novamente no ano de

- A** 2.271.
- B** 2.237.
- C** 2.145.
- D** 2.033.
- E** 2.029.

## GABARITO

**01| E**

Podemos formar  $A_{4,3} = 24$  números de três algarismos com os dígitos disponíveis. Ademais, como temos quatro dígitos, segue que cada um figura  $\frac{24}{4} = 6$  vezes em cada ordem e, portanto, tem-se que a resposta é

$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 10 \cdot 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) + 100 \cdot 6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 6660.$$

**02| A**

Os quadrados perfeitos menores que 900 e múltiplos de 3 são aqueles cujas raízes também são múltiplas de 3. Como 900 é o quadrado perfeito de 30, os possíveis quadrados perfeitos são aqueles de raízes menores que 30, portanto de 0 a 29. Destes, são serão múltiplos de 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 e 27. Logo, Rafael terá um total de 9 combinações possíveis, de acordo com as informações que lembrava.

Para que Rafael não trave seu celular, ele deve acertar a senha na primeira ou na segunda tentativa, ou seja:



$$\text{Acerta } 1^a \rightarrow \frac{1}{9}$$

$$\text{Erra } 1^a / \text{Acerta } 2^a \rightarrow \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{9}$$

$$P_{\text{total}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

**03 | D**

Fazendo congruência em mod 3 pode-se concluir:

- 3 e 6 são congruos a 0
- 1 e 4 são congruos a 1
- 2 e 5 são congruos a 2

Assim, escolhendo a posição do número 6, há seis maneiras de 6 · 2 maneiras posicionar o resto (pois a ordem de colocação é fator de diferenciação) e cada no congruo pode ser escolhido de 2 formas:  $2 \cdot 2 = 4$  maneiras. Logo tem-se  $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$  maneiras.

**04 | E**

Calculando:

$$P_{(c)} = c^{\frac{n}{2}}$$

$$P_{(c) < c} = \frac{c^{\frac{n}{2}}}{c}$$

$$\frac{c^{\frac{n}{2}}}{c} = c^2 \rightarrow c^{\frac{n}{2}} = c^3 \rightarrow n = 6$$

Sendo p e q números primos:

Caso 1:  $c = p^2q$ ; Raízes de  $P(x) \rightarrow pq$ , q e 1

$$q + pq + pq^2 = 80$$

Fazendo:  $q = 2 \rightarrow 2 + 2p + 4p = 80 \rightarrow p = 13$ ; Raízes de  $P(x) \rightarrow 26$ , 2 e 1

$$b = 26 + 2 + 1 = 29 \text{ (R. Girard)}$$

Caso 2:  $c = p^2q$ ; Raízes de  $P(x) \rightarrow p^2$ , q e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

Caso 3:  $c = p^5$ ; Raízes de  $P(x) \rightarrow p^3$ ,  $p^2$  e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

Caso 4:  $c = p^5$ ; Raízes de  $P(x) \rightarrow p^4$ , p e 1 (sem solução para raízes div. de 80)

**05 | D**

Calculando:

$$1 \text{ semana} = 7 \text{ dias} = 7 \cdot 24 \text{ horas} = 7 \cdot 24 \cdot 60 \text{ minutos} = 10.080 \text{ minutos}$$

$$4,8 \text{ toneladas} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

$$\text{Por semana} \Rightarrow 4,8 \cdot 10^3 \cdot 10.080 \approx 4,8 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

**06 | B**

Calculando:

$$b \cdot c = ?$$

$$a + b + c + d = 16$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = d \\ a = b + c \end{array} \right\} 2a = d$$

Logo,

$$a + a + 2a = 16 \rightarrow 4a = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow d = 8$$

$$b + c = 4; b \neq c \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 3; c = 1 \\ \text{ou} \\ b = 1; c = 3 \end{array} \right.$$

$$b \cdot c = 3 \cdot 1 = 3$$

**07 | D**

Comprando um doce de cada tipo ela irá gastar:

$$1 + 2 + 3 = \text{R\$ } 6,00.$$

Restando- lhe ainda R\$ 4,00, que poderá ser distribuído da seguinte forma:

| Doce            | Quantidades | Quantidades | Quantidades | Quantidades |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Brigadeiro      | 4           | 2           | 1           | -           |
| Bem-Casado      | -           | 1           |             | 2           |
| Surpresa de Uva | -           | -           | 1           | -           |

Portanto, temos 4 possibilidades para a compra destes doces.

**08 | A**

[I] VERDADEIRA. Se o número for ímpar  $k = 1$ , ou seja,  $2^{1-1}(2m-1)$ . Logo o número é o produto de um por ele próprio. Se o número for par ele é o produto de um ímpar por uma potência de 2, ou seja,  $2^{n-1}(2m-1)$ .



[II] FALSA. Calculando:

$$a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2 \Rightarrow \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\sin x \cdot \cos x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + \cos x)\right)^2 \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x)$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 0 \neq 1$$

[III] FALSA. Considerando  $a$  e  $b$  como inteiros com MDC igual a 1 (fração irredutível) e sendo  $b$  diferente de zero, pode-se escrever:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2.$$

Mas um quadrado perfeito não pode ser igual a um não quadrado perfeito, assim  $\sqrt{p}$  não pode ser racional.

**09| B**

Transformando os tempos dados para minutos e calculando-se o mínimo múltiplo comum entre eles, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} 45 \text{ s} = 0,75 \text{ min} \\ 60 \text{ s} = 1 \text{ min} \\ 27 \text{ s} = 0,45 \text{ min} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{MMC}(0,75; 1; 0,45) = 9$$

Assim, a cada 9 minutos as lâmpadas vermelhas estarão acesas (pois todas as outras estarão acesas ao mesmo tempo). Lembrando que para encontrar o MMC deve-se fatorar os números (dividir sucessivamente por números primos em ordem crescente). Ou seja:

$$\left. \begin{array}{lll} 0,75 & 1 & 0,45 \\ 0,75 & 0,50 & 0,45 \\ 0,75 & 0,25 & 0,45 \\ 0,25 & 0,25 & 0,15 \\ 0,25 & 0,25 & 0,05 \\ 0,05 & 0,05 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array} \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 900 \Rightarrow \frac{900}{100} = 9$$

**10| B**

Na primeira linha se encontra todos os números que quando divididos por 4 deixam resto zero e apresentam um quociente par. Sabendo que  $2016 = 504 \cdot 4$ , podemos concluir que 2016 encontra-se na primeira linha, portanto 2017 encontra-se na segunda linha.

**11| A**

Desde que  $R = 16 - Q$  e  $N = 13Q + R$ , temos

$$N = 13Q + 16 - Q \Leftrightarrow N = 12Q + 16.$$

Ademais, se  $N + 2 = 13(Q + 1)$ , então

$$12Q + 16 + 2 = 13Q + 13 \Leftrightarrow Q = 5.$$

Portanto, vem  $R = 11$  e  $N = 76$ .

Escrevendo  $76 = 2^2 \cdot 19$ , podemos concluir que os divisores primos de  $N$  são 2 e 19.

**12| A**

O valor total em notas de 100 será representado por  $100n$ , onde  $n$  é o número de notas.

A diferença entre o valor recebido por um médico e o valor recebido por um orientando será dada por:

$$\frac{50n}{6} - \frac{50n}{19} = \frac{(950 - 300) \cdot n}{114} = \frac{650 \cdot n}{114}$$

Considerando:

$$n = 114 \Rightarrow \frac{650 \cdot n}{114} = 650 \text{ (não é múltiplo de 100)}$$

$$n = 228 \Rightarrow \frac{650 \cdot n}{114} = 1500 \text{ (múltiplo de 100)}$$

Portanto, a diferença pedida é no mínimo R\$ 1.500,00.

**13| E**

Calculando os divisores:

Divisores de 8  $\rightarrow \{1, 2, 4, 8\} \rightarrow \text{Soma} = 15$

Divisores de 9  $\rightarrow \{1, 3, 9\} \rightarrow \text{Soma} = 13$

Divisores de 10  $\rightarrow \{1, 2, 5, 10\} \rightarrow \text{Soma} = 18$

Divisores de 11  $\rightarrow \{1, 11\} \rightarrow \text{Soma} = 12$

Divisores de 12  $\rightarrow \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \rightarrow \text{Soma} = 28$

Divisores de 15  $\rightarrow \{1, 3, 5, 15\} \rightarrow \text{Soma} = 24$

Divisores de 16  $\rightarrow \{1, 2, 4, 8, 16\} \rightarrow \text{Soma} = 31$

Divisores de 25  $\rightarrow \{1, 5, 25\} \rightarrow \text{Soma} = 31$

Logo, 16 e 25 são dois inteiros positivos equivalentes.

**14| B**

Sejam  $x$  e  $y$ , respectivamente, o número de dúzias compradas de canetas do tipo A e o número de dúzias compradas de canetas do tipo B. Tem-se que



$$20x + 15y = 1020 \Leftrightarrow 4x + 3y = 204.$$

Ademais, sendo  $777 = 36 \cdot 21 + 21$ , podemos concluir que ele ganhou 21 canetas e, portanto, comprou  $3 \cdot 21 = 63$  dúzias de canetas. Em consequência, vem

$$4 \cdot (63 - y) + 3y = 204 \Leftrightarrow y = 48.$$

**15 | C**

De acordo com as informações do problema, podemos escrever que:

$$N = 10x + y$$

$$M = 10y + x$$

Fazendo  $M - N$ , temos:

$$9x - 9y = 63 \Rightarrow x - y = 7$$

Temos duas opções para os valores de  $x$  e  $y$ , são elas:

$$x = 8 \text{ e } y = 1 \text{ ou } x = 9 \text{ e } y = 2$$

Portanto,

$$N = 81 \text{ ou } N = 92$$

Logo:

$$81 + 92 = 173.$$

**16 | B**

$$96 \text{ km}^3 = 9,6 \cdot 10^{16} \text{ cm}^3$$

$$0,92 \text{ g} = 0,92 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

Massa de  $96 \text{ km}^3$  de gelo em quilogramas:

$$9,6 \cdot 10^{16} \cdot 0,92 \cdot 10^{-3} = 8,832 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

**17 | C**

Se  $A, C, D$  e  $E$  são primos distintos, então  $\{A, C, D, E\} = \{2, 3, 5, 7\}$ . Além disso, temos

$$AEC + CDD + EAE = 1CDC \Leftrightarrow 110(A + E) + D + E = 1000.$$

Donde segue que  $D + E = 10$  e, portanto,  $A + E = 9$ . Em consequência, só pode ser  $A = 2$ ,  $D = 3$ ,  $E = 7$  e  $C = 5$ .

A resposta é  $7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 31$ .

**18 | B**

Elas emergirão juntas depois de  $M$  anos, onde  $M$  é o mínimo múltiplo comum entre 13 e 17.

$$M = 13 \cdot 17 = 221.$$

Portanto, estas espécies emergirão juntas novamente no ano de  $2016 + 221 = 2237$ .

## BINOMIO E COMPLEXOS

06

**01** Determine o algarismo das unidades da seguinte soma  $S = \sum_{n=1}^{2016} n!$ , em que  $n!$  é o fatorial do número natural  $n$ .

- A** 0
- B** 1
- C** 2
- D** 3
- E** 4

**02** O coeficiente de  $x^{12}$  na expansão de  $(1+x^4+x^5)^{10}$  é igual a

- A** 120.
- B** 90.
- C** 81.
- D** 60.
- E** 54.

**03** O coeficiente de  $x^6$  no desenvolvimento de  $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$  é

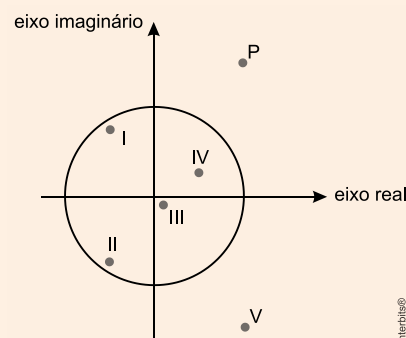
- A** 18.
- B** 24.
- C** 34.
- D** 30.

**04** O valor da expressão

$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1$  é igual a

- A**  $9 \cdot 10^3$
- B**  $9 \cdot 10^{15}$
- C**  $10^{15}$
- D** 999.999
- E**  $999 \cdot 10^{15}$

**05** Seja  $Z$  um número complexo cujo afixo  $P$  está localizado no 1º quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.



Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de  $\frac{1}{Z}$  pode ser

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.



**06|** Resolva a equação  $z^3 - 1 = 0$  no conjunto dos números complexos. Considerando as raízes encontradas, analise as proposições abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) A equação possui três raízes de multiplicidade 1.

( ) Os afijos das raízes formam um triângulo equi-

látero cuja área é  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  unidades de área.

( ) Duas das raízes são conjugadas.

( ) Todas as raízes têm o mesmo módulo.

A sequência correta é

**A** V – F – V – V

**B** V – V – F – V

**C** F – F – V – F

**D** V – F – V – F

**07|** Se  $i$  é o número complexo cujo quadrado é igual a  $-1$ , e  $n$  é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que  $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n$  é um número real sempre que

**A**  $n$  for ímpar.

**B**  $n$  for um múltiplo de 4.

**C**  $n$  for um múltiplo de 3.

**D**  $n$  for um múltiplo de 5.

**08|** Considere as igualdades abaixo.

I.  $(1 - 2i)(1 + 2i) = 5$ , sendo  $i$  a unidade imaginária.

II.  $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots = 2$ .

III.  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100 = 50$ .

Quais igualdades são verdadeiras?

**A** Apenas I.

**B** Apenas III.

**C** Apenas I e II.

**D** Apenas II e III.

**E** I, II e III.

**09|** Considere a equação

$$(a - bi)^{501} = \frac{2(a + bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1}.$$

O número de pares ordenados  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  que satisfazem a equação é

**A** 500.

**B** 501.

**C** 502.

**D** 503.

**E** 504.

**10|** Sejam  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  as raízes da equação  $x^3 + 1 = 0$ , tomando como base o conjunto dos números complexos. Ao representarmos geometricamente essas raízes no plano de Argand-Gauss, obtemos um triângulo, cujos vértices são os afijos de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . A área do triângulo é:

**A**  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

**B**  $\frac{3}{4}$

**C**  $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

**D**  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

**E**  $\frac{3}{2}$

**11|** Sejam  $Z_1$  e  $Z_2$  números complexos tais que  $Z_2$  é imaginário puro e  $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$ . Para quaisquer valores de  $Z_1$  e  $Z_2$  que atendam a essas condições tem-se que:

**A**  $\text{Im}(Z_2) > 0$

**B**  $\text{Im}(Z_2) \leq 0$

**C**  $|Z_1| \leq 2|Z_2|$

**D**  $\text{Re}(Z_1) \geq 0$

**E**  $\text{Re}(Z_1) \leq \text{Im}(Z_2)$





**12** Se  $i$  é o número complexo cujo quadrado é igual a  $-1$ , então, o valor de  $5 \cdot i^{227} + i^6 - i^{13}$  é igual a

- A**  $i + 1$ .
- B**  $4i - 1$ .
- C**  $-6i - 1$ .
- D**  $-6i$ .

**13** Se  $i$  é a unidade imaginária, então  $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$  é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand-Gauss no \_\_\_\_\_ quadrante.

- A** primeiro
- B** segundo
- C** terceiro
- D** quarto

**14** Em relação ao número complexo

$z = i^{87} \cdot (i^{105} + \sqrt{3})$  é correto afirmar que

- A** sua imagem pertence ao 3º quadrante do plano complexo.
- B** é imaginário puro.
- C** o módulo de  $z$  é igual a 4.
- D** seu argumento é igual ao argumento do número complexo  $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

**15** A parte real do número complexo  $z = \frac{1 + (3i)^2}{1 - i}$  é

- A** 1
- B**  $-1$
- C** 2
- D**  $-2$
- E**  $-4$

**16** O lugar geométrico dos pontos  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tais que a equação, em  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

- A** uma circunferência.
- B** uma parábola.
- C** uma hipérbole.
- D** uma reta.
- E** duas retas paralelas.

**17** Sejam  $z$  e  $v$  números complexos onde  $|z| = 1$  e  $v$  tem coordenadas no plano de Argand-Gauss

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Sobre o número complexo  $z$  e  $v$  (resultante da multiplicação dos complexos  $z$  e  $v$ ), podemos afirmar que

- A** sempre é um número real.
- B** sempre tem módulo igual a 2.
- C** sempre é um número imaginário puro.
- D** pertence à circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .
- E** sempre tem argumento igual a  $\frac{\pi}{4}$ .

**18** Considere  $\theta$  um número real qualquer. Sobre os números complexos  $z = \cos(2\theta) + i\sin(\theta)$  e  $w = \cos(\theta) + i\sin(2\theta)$ , pode-se afirmar que

- A**  $|z| + |w| = 1$ .
- B**  $z^2 - w^2 = 0$ .
- C**  $z = \overline{w}$ .
- D**  $z - iw = 0$ .
- E**  $|z|^2 + |w|^2 = 2$ .

## GABARITO

**01** **D**

$$S = \sum_{n=1}^{2016} n! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + \dots$$

O último algarismo da soma acima é igual ao último algarismo da soma:

$1 + 2 + 6 + 24 = 33$ , já que a partir do fatorial de cinco todos os últimos algarismos valem zero.

Portanto, o último algarismo da soma pedida é 3.

**02** **A**

Sendo  $a_1, a_2$  e  $a_3$  números naturais, temos





$$(1+x^4+x^5)^{10} = \sum \frac{10!}{\dot{a}_1! \cdot \dot{a}_2! \cdot \dot{a}_3!} \cdot 1^{\dot{a}_1} \cdot (x^4)^{\dot{a}_2} \cdot (x^5)^{\dot{a}_3}$$

$$= \sum \frac{10!}{\dot{a}_1! \cdot \dot{a}_2! \cdot \dot{a}_3!} \cdot x^{4\dot{a}_2+5\dot{a}_3}.$$

A fim de calcularmos o coeficiente de  $x^{12}$ , devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \dot{a}_1 + \dot{a}_2 + \dot{a}_3 = 10 \\ 4\dot{a}_2 + 5\dot{a}_3 = 12 \end{cases}$$

Portanto, como tal sistema possui solução única  $(\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3) = (7, 3, 0)$ , segue que a resposta é  $\frac{10!}{7! \cdot 3! \cdot 0!} = 120$ .

**03 | B**

Sendo

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p},$$

o termo geral de  $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$ , e

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot (x^2)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q = \binom{3}{q} \cdot 2^{-q} \cdot x^{6-3q},$$

o termo geral de  $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$ , e

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{p} \cdot \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}.$$

Logo, deve-se ter  $p+q=1$ , o que implica em  $(p, q) = (0, 1)$  ou  $(p, q) = (1, 0)$ . Em consequência, a resposta é

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 2^2 = 24.$$

**04 | C**

$$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1 = (1+999)^5 = 1000^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$$

**05 | C**

Seja  $Z = x + yi$ , com  $i = \sqrt{-1}$ ,  $x > 1$  e  $y > 1$ . Assim, vem

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x + yi}$$

$$= \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i.$$

Portanto, como  $0 < \frac{x}{x^2 + y^2} < 1$  e  $0 < \frac{y}{x^2 + y^2} < 1$ ,

tem-se que a imagem de  $\frac{1}{Z}$  pode ser III.

**06 | A**

[I] Verdadeira. Calculando as raízes:

$$z^3 = 1 \rightarrow z^3 = \text{cis}(2k\pi) \rightarrow z = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} k = 0 \rightarrow z = 1 \\ k = 1 \rightarrow z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ k = 2 \rightarrow z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

[II] Falsa. Calculando:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\ell^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \ell^2 = 3$$

$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

[III] Verdadeira. Sim, quando  $k = 1$  ou  $k = 2$  obtêm-se raízes conjugadas.

[IV] Verdadeira. Calculando:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ |z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

**07 | B**

Sendo  $|z|$  e  $\theta$ , respectivamente, o módulo e o argumento principal de  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ , temos

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Assim, vem  $z = 2 \cdot \left( \cos \frac{\theta}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{4} \right)$  e, portanto, pela Primeira Fórmula de Moivre, encontramos

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n &= z^n \\ &= 2^n \cdot \left( \cos \left( n \cdot \frac{\theta}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( n \cdot \frac{\theta}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Desse modo,  $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n$  é um número real sempre que  $\operatorname{sen} \left( n \cdot \frac{\theta}{4} \right) = 0$ , ou seja, sempre que  $n = 4 \cdot (2k)$  ou  $n = 4 \cdot (2k+1)$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Em outras palavras,  $z^n$  é um número real sempre que  $n$  for um múltiplo de 4.

**08 | C**

[I] Verdadeira.

$$(1-2i)(1+2i) = 1^2 - (2i)^2 = 1 - (-4) = 5$$

[II] Verdadeira.

$$2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (\text{PG infinita de razão meio}).$$

[III] Falsa.

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100 = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + (99-100) = (-1) + (-1) + (-1) + \dots + (-1) = 50 \cdot (-1) = -50$$

**09 | D**

Calculando:

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

Caso 1)

$$\begin{aligned} z^{-501} &= \frac{2 \cdot (z)}{|z|^{500} + 1} \cdot z^{501} \Rightarrow |z|^{1002} = \frac{2 \cdot z^{502}}{|z|^{500} + 1} \cdot z^{501} \Rightarrow z^{502} = \frac{|z|^{1002} \cdot (|z|^{500} + 1)}{2} \\ \frac{|z|^{1002} \cdot (|z|^{500} + 1)}{2} &= 1 \Rightarrow z^{502} = 1 \Rightarrow 502 \text{ soluções} \end{aligned}$$

Caso 2)

$$z^{-501} = \frac{2z}{|z|^{500} + 1} \Rightarrow \text{zero é solução}$$

$$\text{Para } z \neq 0 \Rightarrow z^{-501} = \frac{2 \cdot |z|}{|z|^{500} + 1} \Rightarrow |z|^{500} = \frac{2}{|z|^{500} + 1}$$

$$|z|^{500} = w \Rightarrow w = \frac{2}{w+1} \Rightarrow w^2 + w - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w = 1 \\ w = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$|z|^{500} = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Uma solução!

Total de soluções = 503.

**10 | D**

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow (1; 0)$$

$$x_2 = 1 \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left( -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$x_3 = 1 \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left( -\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow A = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**11 | C**

Calculando:

$$Z_2 = ai, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$|Z_1 - ai| = |a|$$

distância de  $Z_1$  até  $ai = |a|$

$Z_1 \rightarrow$  circunferência do centro em  $ai$  e raio  $|a|$

$|Z_1| \rightarrow$  corda da circunferência de diâmetro  $= 2|Z_2|$

$$|Z_1| \leq 2|Z_2|$$

**12 | C**

Sabemos que:



$$227 = 56 \cdot 4 + 3$$

$$6 = 1 \cdot 4 + 2$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Portanto,

$$5 \cdot i^{227} + i^6 - i^{13} = 5 \cdot i^3 + i^2 - i = -5i - 1 - i = -6i - 1$$

**13| B**

Sendo

$$\begin{aligned} 2i^3 + 3i^2 + 3i + 2 &= -2i - 3 + 3i + 2 \\ &= -1 + i \\ &= (-1, 1), \end{aligned}$$

podemos concluir que a imagem do complexo  $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$  está situada no segundo quadrante.

**14| D**

Simplificando:

$$z = i^{87} \cdot (i^{105} + \sqrt{3}) = i^3 \cdot (i + \sqrt{3}) \rightarrow z = 1 - i\sqrt{3}$$

Analisando as alternativas uma a uma:

[A] FALSA. Seu afixo está no 4º quadrante.

[B] FALSA. Não é imaginário puro.

[C] FALSA. Seu módulo é igual a 2.

[D] VERDADEIRA. Ambos tem o mesmo argumento:

$$v = \frac{1}{2}z.$$

**15| E**

$$z = \frac{1 + (3i)^2}{1 - i}$$

$$z = \frac{1 + 9i^2}{1 - i}$$

$$z = \frac{1 - 9}{1 - i}$$

$$z = \frac{-8}{1 - i}$$

$$z = \frac{-8}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}$$

$$z = \frac{-8 - 8i}{1^2 - i^2}$$

$$z = \frac{-8 - 8i}{2}$$

$$z = -4 - 4i$$

$$\text{Re}(z) = -4$$

**16| B**

Calculando:

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

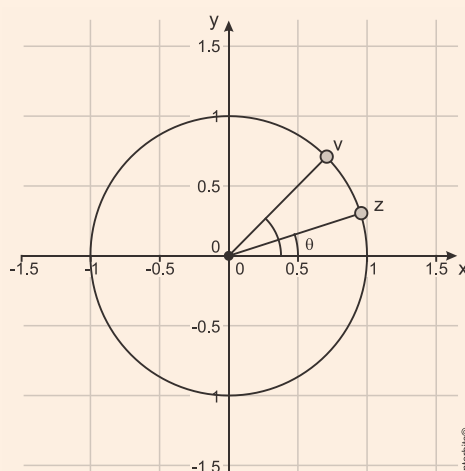
$$z^2 + z + 2 = a + ib$$

Fazendo  $z = ai$ :

$$ai^2 + ai + 2 = a + bi$$

$$\left. \begin{aligned} a &= 2 - a^2 \\ b &= a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 2 - a \Rightarrow (b - 0)^2 = \frac{a - 2}{-1} \Rightarrow \text{Parábola}$$

**17| D**



Escrevendo os complexos  $z$  e  $v$  na forma trigonométrica, temos:

$$z = 1 \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$v = 1 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

Efetuando o produto de  $z$  e  $v$  na forma trigonométrica, temos:

$$z \cdot v = 1 \cdot 1 \cdot (\cos(45^\circ + \theta) + i \sin(45^\circ + \theta)) = 1 \cdot (\cos(45^\circ + \theta) + i \sin(45^\circ + \theta))$$

Com o módulo do produto continua sendo 1, concluímos que este produto também pertence à circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

**18| E**

Tomando  $\theta = 0$ , vem  $z = 1$  e  $w = 1$ . Logo, segue que  $|z| + |w| = 2$  e  $z - iw = 1 - i$ .

Por outro lado, para  $\theta = \frac{\pi}{4}$  rad, temos  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}i$  e

$w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$ . Desse modo, é fácil ver que  $z^2 - w^2 = \sqrt{2}i$  e  $z \neq w$ .



Finalmente, sendo

$$|z| = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 \theta}$$

e

$$|w| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 2\theta},$$

encontramos

a vértice (2,0)  $|z|^2 + |w|^2 = \cos^2 2\theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 2\theta = 2.$

## CONJUNTOS E DETERMINANTES

**01** Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente que, nesse grupo,

- A** pelo menos uma pessoa leu os dois livros.
- B** nenhuma pessoa leu os dois livros.
- C** pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.
- D** todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

**02** Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ . Se  $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$ , então o número de elementos de C é

- A** 10.
- B** 11.
- C** 12.
- D** 13.
- E** 14.

**03** Em uma consulta à comunidade acadêmica sobre a necessidade de melhorias na área física de um determinado campus do IFSul, foi obtido o seguinte resultado:

- 538 sugerem reformas nas salas de aula.
- 582 sugerem reformas na biblioteca.
- 350 sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca.
- 110 sugerem reformas em outras instalações.

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa consulta?

- A** 770
- B** 880
- C** 1.120
- D** 1.580

**04** Sejam os conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 5\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$  e  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ . Pode-se afirmar que

- A**  $(A - B) \cup C = C$
- B**  $(A - C) \cap B = \emptyset$
- C**  $(B \cup C) \cap A = \emptyset$
- D**  $(B \cap C) \cap A = A$

**05** Três emissoras de TV apresentam programação infantil durante o dia. Na emissora A, o horário dessa programação vai de 11 h 40 min até 18 h 30 min. Na emissora B, vai de 9 h 30 min até 16 h 40 min e na emissora C vai de 10 h 50 min até 13 h 20 min e de 14 h 50 min até 17 h 10 min. O tempo em que as três emissoras apresentam essa programação simultaneamente é de:

- A** 3 h 20 min
- B** 3 h 30 min
- C** 3 h 40 min
- D** 3 h 50 min
- E** 4 h

**06** Em uma família, sabe-se que três filhos fazem curso de inglês, dois praticam natação e só um deles faz as duas atividades. As mensalidades do curso de inglês e da natação são, respectivamente, R\$ 240,00 e R\$ 180,00 por pessoa. A despesa total dessa família apenas com essas atividades dos filhos é de:

- A** R\$ 1.500,00
- B** R\$ 1.080,00
- C** R\$ 1.210,00
- D** R\$ 1.380,00
- E** R\$ 1.460,00



**07** Maria, aluna da Fatec Mococa, para garantir a segurança das mensagens que pretende transmitir, criou um sistema de criptografia da seguinte forma:

- montou uma tabela de 2 linhas e 13 colunas para colocar as 26 letras do alfabeto, sem repetição de letra;

- nas cinco células iniciais da 1ª linha, da esquerda para a direita, escreveu, uma a uma, as letras F, A, T, E, C, nessa ordem;

- ainda na 1ª linha, na 6ª célula, da esquerda para a direita, obedecendo a ordem alfabética (de A a Z), colocou a primeira letra ainda não utilizada nas células anteriores;

- da 7ª célula a 13ª célula da 1ª linha, inseriu sete letras, da esquerda para a direita, sem repetir letra, seguindo a ordem alfabética, começando pela primeira letra ainda não utilizada nas células anteriores;

- preencheu a 2ª linha, da esquerda para a direita, com as letras restantes do alfabeto, também em ordem alfabética e sem repetição de qualquer letra já utilizada anteriormente.

A tabela mostra o início do processo, com as seis primeiras

|   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|
| F | A | T | E | C | B |  |  |  |  |  |  |  |
|   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |

Tendo construído a tabela conforme o descrito, para criptografar uma mensagem, Maria substitui cada letra da 1ª linha pela que está na 2ª linha, na mesma coluna, e vice-versa. A acentuação, a pontuação e o espaço entre as palavras são desconsiderados.

Assim, para desejar BOA PROVA para uma colega, que sabia fazer a decodificação, escreveu RTNEBTHN.

Para João, que também sabia decodificar a mensagem, Maria escreveu:

AGAQNENBPSPNEBPASPB

A partir da decodificação, João entendeu que a mensagem de Maria foi

- A** Nunca pare de aprender
- B** Nunca deixe de estudar
- C** Nunca faça isso de novo
- D** Sempre tire boas notas
- E** Sempre faça boas ações

**08** Dentre as equações abaixo, qual NÃO possui solução com  $x$  e  $y$  inteiros?

**A**  $x^2 + y^2 = 1.$

**B**  $x^2 + y^2 = 2.$

**C**  $x^2 + y^2 = 3.$

**D**  $x^2 + y^2 = 4.$

**E**  $x^2 + y^2 = 5.$

**09** Marque a alternativa **INCORRETA**.

**A** Todo número NATURAL é também INTEIRO.

**B** Todo número NATURAL é também RACIONAL.

**C** Todo número NATURAL é também IRRACIONAL.

**D** Todo número NATURAL é também REAL.

**E** Todo número IRRACIONAL é também REAL.

**10** Rafaela e Henrique participaram de uma atividade voluntária que consistiu na pintura da fachada de uma instituição de caridade. No final do dia, restaram duas latas de tinta idênticas (de mesmo tamanho e cor). Uma dessas latas estava cheia de tinta até a metade de sua capacidade e a outra estava cheia

de tinta até  $\frac{3}{4}$  de sua capacidade. Ambos decidiram juntar esse excedente e dividir em duas partes iguais, a serem armazenadas nessas mesmas latas. A fração que representa o volume de tinta em cada uma das latas, em relação à sua capacidade, após essa divisão é:

**A**  $\frac{1}{3}.$

**B**  $\frac{5}{8}.$

**C**  $\frac{5}{6}.$

**D**  $\frac{4}{3}.$

**E**  $\frac{5}{2}.$



**11** Sendo  $a$  e  $b$  números reais, considere as afirmações a seguir.

I. Se  $a < b$  então  $-a > -b$ .

II. Se  $a > b$  então  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

III. Se  $a < b$  então  $a^2 < b^2$ .

Quais estão corretas?

- A** Apenas I.
- B** Apenas II.
- C** Apenas III.
- D** Apenas I e II.
- E** I, II e III.

**12** Calcule o determinante da matriz  $A$  de ordem  $n$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & K & 1 \\ M & M & M & M & M & O & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & K & 2n-1 \end{pmatrix}$$

- A**  $\det(A) = \prod_{n=1}^{n-1} 2n$
- B**  $\det(A) = \prod_{n=1}^n 2n-1$
- C**  $\det(A) = \prod_{n=1}^{n-1} 2^n$
- D**  $\det(A) = \prod_{n=1}^n 2^{n-1}$
- E**  $\det(A) = 1$

**13.** (Uerj 2017) Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de  $t$  deve ser igual a:

- A** 1
- B** 2
- C** 3
- D** 4

**14** Uma matriz quadrada  $X = (a_{ij})$  é simétrica quando  $a_{ij} = a_{ji}$ . Se o determinante da matriz simétrica

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$$
 é igual a 8, então, o valor da soma

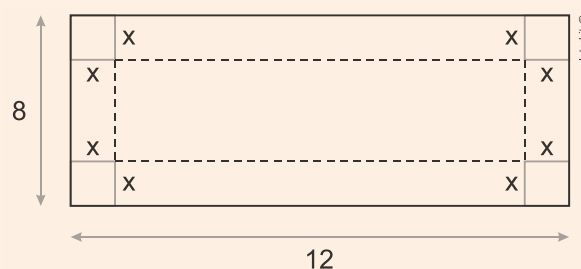
$x + y + z + w$  pode ser

- A** 9 ou 11.
- B** 9 ou 25.
- C** 11 ou 25.
- D** 9 ou 13.

**15** Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , o determinante da matriz  $A \cdot B$  é

- A** 4
- B** 6
- C** 8
- D** 12
- E** 27

**16** Partindo de um retângulo de dimensões 8 e 12, um garoto recorta, de cada canto, um quadrado de lado  $x$ , conforme a figura:



Dobrando nas linhas tracejadas, o garoto obtém uma caixa. A expressão que melhor representa o volume máximo dessa caixa é:

- A**  $24 - 3x$ .
- B**  $8x - 2x^2$ .
- C**  $12x - 2x^2$ .
- D**  $4x^3 - 40x^2 + 96x$ .
- E**  $8x + 20$ .





## GABARITO

### 01| C

A única alternativa correta é a [C]. Se cinco pessoas leram o livro A e quatro pessoas distintas leram o livro B, há um total de 9 pessoas, sendo possível que ao menos uma pessoa não tenha lido nenhum dos livros.

### 02| E

Fazendo as multiplicações pertinentes entre  $x$  e  $y$  e desconsiderando os elementos repetidos, conclui-se que o número de elementos em  $C$  é 14.

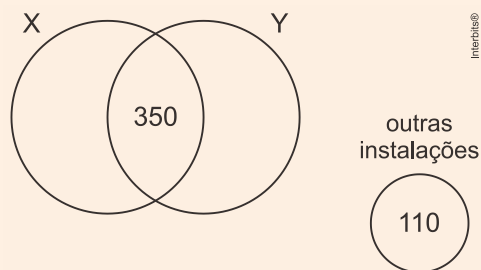
|   | -1 | -2  | -3  | -4  | -5  |
|---|----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | -1 | -2  | -3  | -4  | -5  |
| 2 | -2 | -4  | -6  | -8  | -10 |
| 3 | -3 | -6  | -9  | -12 | -15 |
| 4 | -4 | -8  | -12 | -16 | -20 |
| 5 | -5 | -10 | -15 | -20 | -25 |

### 03| B

Tome reforma nas salas de aula como  $x$  e reformas na biblioteca como  $y$ .

Sabendo que 350 pessoas sugerem reformas nas salas de aula e na biblioteca, ou seja, a intersecção entre  $x$  e  $y$ .

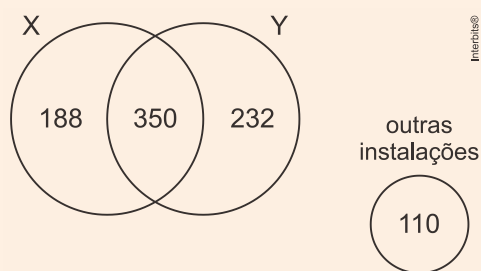
Logo, pode-se aplicar o Diagrama de Venn para tal situação da seguinte maneira:



Como 350 representa a intersecção entre reformas nas salas de aula e na biblioteca, basta achar a diferença da parte das duas partes com a parte em comum. Desta forma:

$$538 - 350 = 188 \text{ e } 582 - 350 = 232$$

Transcrevendo para o Diagrama de Venn, temos:

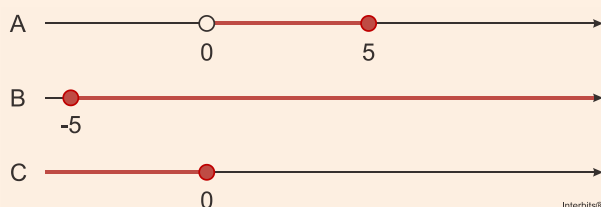


Para obter a quantidade de pessoas entrevistadas basta somar todos os valores. Note que a amostra possui 110 pessoas que opinaram reformas em outras instalações. Somando todos os valores:

$$188 + 350 + 232 + 110 = 880 \text{ pessoas.}$$

### 04| A

Representamos os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  na reta numérica.



Análise das alternativas:

[A] Verdadeira:  $(A - B) \cup C = \emptyset \cup C = C$

[B] Falsa:  $(A - C) \cap B = A \cap B = A$

[C] Falsa:  $(B \cup C) \cap A = \square \cap A = A$

[D] Falsa:  $(B \cap C) \cap A = [-5, 0] \cap A = \emptyset$

### 05| B

O tempo em que as três emissoras apresentam a programação simultaneamente é dado por

$$(13 \text{ h } 20 \text{ min} - 11 \text{ h } 40 \text{ min}) + (16 \text{ h } 40 \text{ min} - 14 \text{ h } 50 \text{ min}) = 1 \text{ h } 40 \text{ min} + 1 \text{ h } 50 \text{ min} = 3 \text{ h } 30 \text{ min.}$$

### 06| B

O resultado pedido é  $240 \cdot 3 + 180 \cdot 2 = \text{R\$ } 1.080,00$ .

### 07| A

A tabela de Maria foi a seguinte:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | A | T | E | C | B | D | G | H | I | J | K | L |
| M | N | O | P | Q | R | S | U | V | W | X | Y | Z |

Logo, a mensagem que Maria escreveu para João é:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | G | A | Q | N | E | N | B | P | S | P | N | E | B | P | A | S | P | B |
| N | U | N | C | A | P | A | R | E | D | E | A | P | R | E | N | D | E | R |

**08 | C**

Sabendo que  $x^2 \geq 0$  e  $y^2 \geq 0$  para quaisquer  $x$  e  $y$  inteiros, podemos concluir que  $x^2 + y^2 = 3$  se, e somente se,  $(x^2, y^2) \in \{(0, 3), (3, 0), (1, 2), (2, 1)\}$ . Porém, os inteiros 2 e 3 não são quadrados de nenhum inteiro e, assim, a equação  $x^2 + y^2 = 3$  não possui solução com  $x$  e  $y$  inteiros.

**09 | C**

[A] Correta. Os números inteiros são todos naturais mais seus simétricos negativos. Logo, todo natural também é inteiro

[B] Correta. Todo número racional é obtido através da divisão de dois números inteiros. Logo, sabendo que todo natural é inteiro, todo natural é também racional.

[C] Incorreta. Número irracional é todo número que não pode obtido a partir da divisão de dois inteiros, logo, um natural nunca será um irracional.

[D] Correta. Números reais é a junção de todos os números racionais e irracionais, logo, todo natural é real, visto que os naturais são racionais.

[E] Correta. Números reais é a junção de todos os números racionais e irracionais.

**10 | B**

O resultado é dado por  $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$ .

**11 | A**

[I] Verdadeira.  $a < b \cdot (-1) \Rightarrow -a > -b$

[II] Falsa.  $3 > -2 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{-2}$

[III] Falsa.  $-5 < 2 \Rightarrow (-5)^2 > 2^2$

**12 | A**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(n-1) & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot (n-1) = \prod_{n=1}^{n-1} 2n$$

**13 | A**

Tem-se que

$$\begin{vmatrix} 3+t & -4 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-4) + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1.$$

Portanto, como  $1 > 0$ , segue que a resposta é 1.

**14 | B**

Se  $M$  é simétrica, então  $x = 2$ ,  $z = 3$  e  $w = y$ . Ademais, como o determinante de  $M$  é igual a 8, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & y \\ 3 & y & 1 \end{vmatrix} = 8 \Leftrightarrow 1 + 6y + 6y - 9 - y^2 - 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 12y + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = 10.$$

Em consequência, a soma  $x + y + z + w$  pode ser  $5 + 4 = 9$  ou  $5 + 20 = 25$ .

**15 | A**

Pelo Teorema de Binet,  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , ou seja,

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(AB) = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \cdot (-1 \cdot 0 - 2 \cdot 1)$$

$$\det(AB) = -2 \cdot (-2)$$

$$\det(AB) = 4$$

**16 | D**

Note que um dos lados da caixa a ser construída mede  $12 - 2x$ , já que foi retirado  $x$  de cada extremidade. O segundo lado mede  $8 - 2x$ , já que foi retirado  $x$  de cada extremidade. Observe também que, após o corte, a caixa terá altura  $x$ .

Sabendo que o volume da caixa é dado pelo produto entre área da base ( $A_b$ ) pela altura ( $h$ ), temos:

$$A_b = (12 - 2x) \cdot (8 - 2x)$$

$$A_b = 96 - 24x - 16x + 4x^2$$

$$A_b = 4x^2 - 40x + 96$$

Calculando o volume temos:

$$V = (A_b) \cdot (h)$$

$$V = (4x^2 - 40x + 96) \cdot x$$

$$V = 4x^3 - 40x^2 + 96x$$

## EQUAÇÕES

**01** Uma senhora foi ao shopping e gastou a metade do dinheiro que tinha na carteira e pagou R\$ 10,00 de estacionamento. Ao voltar para casa parou numa livraria e comprou um livro que custou a quinta parte do que lhe havia sobrado, ficando com R\$ 88,00.

Se ela tivesse ido apenas à livraria e comprado o mesmo livro, ter-lhe-ia restado:

- A** R\$ 218,00
- B** R\$ 186,00
- C** R\$ 154,00
- D** R\$ 230,00
- E** R\$ 120,00

**02** No concurso CPCAR foi concedido um tempo  $T$  para a realização de todas as provas: Língua Portuguesa, Matemática e Língua Inglesa; inclusive marcação do cartão-resposta.

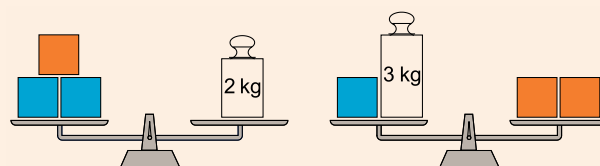
Um candidato gastou  $\frac{1}{3}$  deste tempo  $T$  com as questões de Língua Portuguesa e 25% do tempo restante com a parte de Língua Inglesa.

A partir daí resolveu as questões de Matemática empregando 80% do tempo que ainda lhe restava. Imediatamente a seguir, ele gastou 5 minutos preenchendo o cartão-resposta e entregou a prova faltando 22 minutos para o término do tempo  $T$  estabelecido.

É correto afirmar que o tempo  $T$ , em minutos, é tal que

- A**  $T < 220$
- B**  $220 \leq T < 240$
- C**  $240 \leq T < 260$
- D**  $T \geq 260$

**03** Três cubos laranjas idênticos e três cubos azuis idênticos estão equilibrados em duas balanças de pratos, também idênticas, conforme indicam as figuras.



A massa de um cubo laranja supera a de um cubo azul em exato

- A** 1,3 kg.
- B** 1,5 kg.
- C** 1,2 kg.
- D** 1,4 kg.
- E** 1,6 kg.

**04** Ao entrar na sala de aula, um aluno perguntou ao seu professor de Matemática que horas eram. O professor então respondeu: desde que começou este dia, as horas que já se passaram excedem as que faltam transcorrer em 3 horas e 16 minutos.

Assim, a hora em que o aluno fez a pergunta ao professor é

- A** 12h 36min.
- B** 13h 38min.
- C** 14h 38min.
- D** 15h 16min.



**05** | Determine o valor de  $k$  para que a equação  $x^2 + kx + 6 = 0$  tendo como raízes os valores 2 e 3.

- A** 0.
- B** 5.
- C** 6.
- D** -5.
- E** -6.

**06** | Atribui-se aos pitagóricos a regra para a determinação da tríade que fornece os três lados de um triângulo retângulo. Essa regra é dada por  $\left(\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$  sendo  $m$  um número inteiro ímpar e  $m \geq 3$ .

Fonte: Carl B. Boyer: História da matemática — Editora Edgard Blücher — 1974 (Adaptado)

Considere um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , com  $b > c$ , cujos lados obedeçam a essa regra. Se  $a + b + c = 90$ , o valor de  $a \cdot c$ , é

- A** 327
- B** 345
- C** 369
- D** 381

**07** | Uma grande empresa de publicidade, responsável pela divulgação de um show de rock, recebeu 180 convites da organização geral do evento para distribuir entre seus funcionários. Decidiu-se que, somente, os setores de Atendimento e de Planejamento da empresa receberiam, cada um, 90 convites. Dentro de cada setor, os convites seriam divididos igualmente pelos respectivos funcionários.

Feita a distribuição, cada funcionário do atendimento acabou recebendo 4 convites a mais do que cada funcionário do planejamento.

Sabendo que os dois setores da empresa possuem, juntos, 60 funcionários, podemos afirmar que

- A** cada funcionário do atendimento recebeu 6 convites.
- B** cada funcionário do planejamento recebeu 4 convites.

**C** o setor de atendimento possui mais de 20 funcionários.

**D** o setor de planejamento possui menos de 40 funcionários.

**08** | Um grupo de  $n$  alunos sai para lanche e vai a uma pizzeria. A intenção do grupo é dividir igualmente a conta entre os  $n$  alunos, pagando, cada um,  $p$  reais. Entretanto, 2 destes alunos vão embora antes do pagamento da referida conta e não participam do rateio. Com isto, cada aluno que permaneceu teve que pagar  $(p + 10)$  reais.

Sabendo que o valor total da conta foi de 600 reais, marque a opção INCORRETA.

- A** O valor que cada aluno que permaneceu pagou a mais corresponde a 20% de  $p$ .
- B**  $n$  é um número maior que 11.
- C**  $p$  é um número menor que 45.
- D** O total da despesa dos dois alunos que saíram sem pagar é maior que 80 reais.

**09** | No conjunto dos números reais, se dois valores têm o mesmo quadrado, então eles são iguais ou simétricos, ou seja,  $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$  ou  $a = -b$ . Desse modo, se  $a^2 = 4^2$ , podemos garantir que  $a = 4$  ou  $a = -4$ .

Na equação do segundo grau  $(2x - 200)^2 = (x + 500)^2$ , a soma das soluções é:

- A** -100
- B** 600
- C** 700
- D** 800

**10** | Considere a equação  $x^2 + px + q = 0$ , onde  $p$  e  $q$  são números reais. Se as raízes desta equação são dois números inteiros consecutivos, positivos e primos, então, o valor de  $(p + q)^2$  é igual a

- A** 1.
- B** 4.
- C** 9.
- D** 16.



**11** Em março de 2016, Jorge, professor de Matemática, desejava comprar certa quantidade de calculadoras modelo “X” para poder realizar algumas atividades com seus alunos em sala de aula. Após algumas buscas pela internet, observou, na época, que gastaria R\$ 300,00 no total.

Como o professor achou que o preço unitário do produto não aumentaria ao longo do ano e como as atividades em que usaria as calculadoras só ocorreriam em setembro, resolveu esperar um pouco. Lembrou-se de fazer uma segunda verificação em julho, quando descobriu que o preço unitário da mercadoria tinha sofrido um acréscimo de R\$ 20,00. Como pretendia gastar ainda os mesmos R\$ 300,00, percebeu que acabaria comprando, no total, menos quatro peças do que compraria em março.

Sabe-se que o professor pretendia que cada aluno de sua turma recebesse uma calculadora para realizar as atividades planejadas. Sendo assim, podemos afirmar que

- A** em março, ele compraria mais de 8 calculadoras.
- B** em março, cada peça custaria menos que R\$ 30,00.
- C** em julho, cada peça custaria mais que R\$ 50,00.
- D** em julho, ele compraria menos de 6 calculadoras.

**12** Na resolução de um problema que recaía em uma equação do 2º grau, um aluno errou apenas o termo independente da equação e encontrou como raízes os números 2 e -14. Outro aluno, na resolução do mesmo problema, errou apenas o coeficiente do termo de primeiro grau e encontrou como raízes os números 2 e 16.

As raízes da equação correta eram:

- A** -2 e -14
- B** -4 e -8
- C** -2 e 16
- D** -2 e -16
- E** 4 e 14

**13** Considere, em  $\mathbb{R}$ , a equação  $(m+2)x^2 - 2mx + (m-1) = 0$  na variável  $x$ , em que  $m$  é um número real diferente de -2. Analise as afirmativas abaixo e classifique-as em V (verdadeira) ou F (falsa).

- ( ) Para todo  $m > 2$  a equação possui conjunto solução vazio.
- ( ) Existem dois valores reais de  $m$  para que a equação admita raízes iguais.
- ( ) Na equação, se  $\Delta > 0$ , então  $m$  só poderá assumir valores positivos.

A sequência correta é

- A** V – V – V
- B** F – V – F
- C** F – F – V
- D** V – F – F

**14** Se as raízes da equação  $x^2 - 5|x| - 6 = 0$  são também raízes de  $x^2 - ax - b = 0$ , então, os valores dos números reais  $a$  e  $b$  são respectivamente

- A** -1 e 6.
- B** 5 e 6.
- C** 0 e 36.
- D** 5 e 36.

**15** Para certos valores reais de  $k$ , o polinômio  $P(x) = x^2 - 6x + |2k - 7|$  é divisível por  $x - 1$ . A soma de todos esses valores é igual

- A** 8.
- B** 7.
- C** 5.
- D** -1.
- E** -5.

**16** A soma das raízes da equação  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$  é igual a:

- A** 1
- B** 4
- C** -3
- D** 0
- E** -1





**17** Sobre a equação  $\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}} = x$ , respeitando sua validade no universo dos números reais, analise as afirmativas.

I. Possui duas raízes irracionais.

II. Não possui raízes negativas.

III. Possui conjunto solução com um único elemento.

Pode-se afirmar, então, que

- A** todas são verdadeiras.
- B** apenas a I é falsa.
- C** todas são falsas.
- D** apenas a III é verdadeira.

**18** Um polinômio de quinto grau tem 2 como uma raiz de multiplicidade 3. A razão entre o coeficiente do termo de quarto grau e o coeficiente do termo de quinto grau é igual a  $-7$ . A razão entre o termo independente e o coeficiente do termo de quinto grau é igual a 96.

A menor raiz desse polinômio vale

- A** 0
- B**  $-1$
- C**  $-2$
- D**  $-3$

**19** Sobre uma equação linear de grau  $n$  é **INCORRETO** afirmar que

- A** terá  $n$  raízes complexas.
- B** se  $n$  for ímpar, sempre terá, ao menos, uma raiz real.
- C** se um número complexo  $z = a + bi$ ,  $b \neq 0$  for raiz, então seu conjugado também o será.
- D** a equação não pode ter raízes repetidas.
- E** uma equação acima de grau 4 pode ter todas as raízes reais.

**20** As três raízes da equação  $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$  são  $m$ ,  $n$  e  $p$ . Sabendo que  $m$  e  $n$  são complexas e que  $p$  é uma raiz racional, o valor de  $m^2 + n^2$  é igual a

- A**  $-18$
- B**  $-10$
- C** 0
- D** 4
- E** 8

**21** A equação algébrica  $x^3 - 7x^2 + kx + 216 = 0$ , em que  $k$  é um número real, possui três raízes reais. Sabendo-se que o quadrado de uma das raízes dessa equação é igual ao produto das outras duas, então o valor de  $k$  é igual a

- A**  $-64$ .
- B**  $-42$ .
- C**  $-36$ .
- D** 18.
- E** 24.

**22** Se os números de divisores positivos de 6, de 9 e de 16 são as raízes da equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , onde os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, então, o valor do coeficiente  $b$  é

- A** 41.
- B** 45.
- C** 43.
- D** 47.

**23** Considere a equação  $x^4 - 2ax^3 + 9ax^2 - 6ax + 9a = 0$ . Sabendo que  $a$  é raiz dupla dessa equação e não é nulo, determine o valor de  $a$ .

- A**  $a = -1$
- B**  $a = 1$
- C**  $a = 2$
- D**  $a = 3$
- E**  $a = 4$



**24** | O número real  $\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$  pertence ao conjunto

- A**  $[-5, -3)$
- B**  $[-3, -1)$
- C**  $[-1, 1)$
- D**  $[1, 3)$
- E**  $[3, 5)$

**25** | Sejam  $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  um polinômio e  $M$  o conjunto dos números reais  $k$  tais que  $P(k) = 0$ . O número de elementos de  $M$  é

- A** 1.
- B** 2.
- C** 4.
- D** 5.

## GABARITO

**01** | **A**

Seja  $x$  a quantia que a senhora dispunha ao sair de casa. Logo, sabendo que a quantia que restou após as despesas é igual a R\$ 88,00, temos

$$\frac{4}{5} \cdot \left( \frac{x}{2} - 10 \right) = 88 \Leftrightarrow x = \text{R\$ } 240,00.$$

Portanto, como o livro custava  $\frac{1}{5} \cdot \left( \frac{240}{2} - 10 \right) = \text{R\$ } 22,00$ , se ela tivesse ido apenas à livraria e comprado o mesmo livro, ter-lhe-ia restado  $240 - 22 = \text{R\$ } 218,00$ .

**02** | **D**

Tempo utilizado para as questões de Língua Portuguesa:

$$\frac{T}{3}$$

Tempo utilizado para as questões de Língua Inglesa:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot T}{3} = \frac{T}{6}$$

Tempo utilizado para as questões de Matemática:

$$\frac{80}{100} \cdot \left( 1 - \frac{T}{3} - \frac{T}{6} \right) = \frac{2 \cdot T}{5}$$

Tempo utilizado para o preenchimento do cartão de respostas: 5 minutos.

Tempo que sobrou depois de ter entregado a prova: 22 minutos.

Temos então a seguinte equação:

$$\frac{T}{3} + \frac{T}{6} + \frac{2T}{5} + 5 + 22 = T \Rightarrow \frac{10T + 5T + 12T + 150 + 660}{30} = \frac{30T}{30} \Rightarrow 3T = 810 \Rightarrow T = 270 \text{ minutos.}$$

Portanto,  $T \geq 260$ .

**03** | **D**

Sejam  $a$  e  $\ell$ , respectivamente, a massa de um cubo azul e a massa de um cubo laranja. Assim, temos

$$\begin{cases} 2a + \ell = 2 \\ a + 3 = 2\ell \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\ell - 3 \\ 4\ell - 6 + \ell = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,2 \text{ kg} \\ \ell = 1,6 \text{ kg} \end{cases}$$

Portanto, a resposta é  $\ell - a = 1,4 \text{ kg}$ .

**04** | **B**

Horas que passaram:  $x$

Horas que faltam passar:  $24 - x$

De acordo com o enunciado, podemos escrever que:

$$x - (24 - x) = 3 \text{ horas} + 16 \text{ minutos.}$$

$$2x = 27 \text{ horas} + 16 \text{ minutos}$$

$$x = 13 \text{ horas} + 30 \text{ minutos} + 8 \text{ minutos}$$

Portanto, o horário em que o aluno fez a pergunta foi 13h 38min.

**05** | **D**

Sabendo que uma equação de segundo grau é da forma,

$$ax^2 - Sx + P = 0$$

$$ax^2 + \left( \frac{-b}{a} \right)x + \left( \frac{c}{a} \right) = 0$$

Onde  $S$  é soma das raízes e  $P$  é o produto das raízes. Logo, temos que  $k$  representa a soma das raízes.

$$k = -S = -(2 + 3) = -5$$



**06 | C**

Calculando:

$$a + b + c = 90$$

$$b > c$$

$$a = \frac{m^2 + 1}{2}; \quad b = \frac{m^2 - 1}{2}; \quad c = m$$

$$\frac{m^2 + 1}{2} + \frac{m^2 - 1}{2} + m = 90 \rightarrow \frac{m^2 + 1}{2} + \frac{m^2 - 1}{2} + \frac{2m}{2} = 90 \rightarrow m^2 + m - 90 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 1} \rightarrow \begin{cases} m' = 9 \\ m'' = -10 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo,

$$a = \frac{9^2 + 1}{2} \rightarrow a = 41; \quad c = 9$$

$$a \cdot c = 41 \cdot 9 = 369$$

**07 | A**

Sendo  $x$  o número de convites de recebeu cada funcionário de planejamento, podemos escrever que:

Número de funcionários do atendimento será dado

$$\text{por: } \frac{90}{x + 4}$$

Número de funcionários do atendimento será dado

$$\text{por: } \frac{90}{x}$$

Podemos então escrever que:

$$\frac{90}{x + 4} + \frac{90}{x} = 60 (\div 30)$$

$$\frac{3}{x + 4} + \frac{3}{x} = 2$$

$$3 \cdot x + 3 \cdot (x + 4) = 2 \cdot x \cdot (x + 4)$$

$$3x + 3x + 12 = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 2x - 12 = 0 (\div 2)$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -3$$

Portanto, cada funcionário do planejamento recebeu dois convites e cada funcionário do atendimento recebeu 6 convites.

[A] Verdadeira, pois  $4 + 2 = 6$ .

[B] Falsa, pois  $x = 2$ .

[C] Falsa, pois  $\frac{90}{2 + 4} = 15$ .

[D] Falsa, pois  $\frac{90}{2} = 45$ .

**08 | C**

Valor que cada aluno deveria pagar:  $p = \frac{600}{n}$

Valor referente aos alunos que foram embora:

$$2p = 2 \cdot \frac{600}{n}$$

Os outros alunos pagaram 10 a mais cada um pra suprir a dívida dos colegas que foram embora, portanto:

$$(n - 2) \cdot 10 = 2 \cdot \frac{600}{n} \Rightarrow n^2 - 2n - 120 = 0 \Rightarrow n = 12 \text{ ou } n = -10 \text{ (não convém)}$$

Considerando, então,  $n = 12$ , temos  $p = 50$ .

Analisando cada uma das alternativas, temos:

[A] Correta, pois 20% de 50 = 10.

[B] Correta, pois  $n = 12 > 11$ .

[C] Incorreta, pois  $p = 50 > 45$ .

[D] Correta, pois  $2 \cdot 50 = 100 > 80$ .

**09 | B**

$$(2x - 200)^2 = (x + 500)^2 \Rightarrow$$

$$2x - 200 = x + 500 \text{ ou } 2x - 200 = -x - 500 \Rightarrow$$

$$x = 700 \text{ ou } 3x = -300 \Rightarrow$$

$$x = 700 \text{ ou } x = -100$$

Portanto, a soma das raízes será:  $700 + (-100) = 600$ .

**10 | A**

Os únicos primos que são positivos e consecutivos são os números 2 e 3, já que existe apenas o 2 como sendo par e primo.

Portanto, 2 e 3 são as raízes da equação  $x^2 + px + q = 0$ .

Utilizando a ideia de soma e produto das raízes, podemos considerar que:

$$\frac{-p}{1} = 2 + 3 \Rightarrow p = -5$$

$$\frac{q}{1} = 6 \Rightarrow q = 6$$



Logo,

$$(p+q)^2 = (-5+6)^2 = 1^2 = 1.$$

**11 | A**

Quantidade de calculadoras:  $x$

Preço de cada calculadora:  $\frac{300}{x}$

De acordo com o enunciado, podemos escrever:

$$\left(\frac{300}{x} + 20\right) \cdot (x-4) = 300 \Rightarrow 300 + 20x - \frac{1200}{x} - 80 = 300 \Rightarrow$$

$$20x - \frac{1200}{x} - 80 = 0 \Rightarrow x - \frac{60}{x} - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x - 60 = 0 \Rightarrow x = 10 \text{ ou } x = -6 \text{ (não convém)}$$

Portanto, em março ele compraria mais de 8 calculadoras.

**12 | B**

Calculando:

Aluno 1:

$$ax^2 + bx + c_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -14 \end{cases} \Rightarrow \text{Girard} \Rightarrow \begin{cases} b = 12 \\ c_i = -28 \end{cases}$$

$$4a + 12 \cdot 2 - 28 = 0 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

Aluno 2:

$$ax^2 + b_i x + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 16 \end{cases} \Rightarrow \text{Girard} \Rightarrow \begin{cases} b_i = -18 \\ c = 32 \end{cases}$$

Equação correta:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + 12x + 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = -4 \\ x'' = -8 \end{cases}$$

**13 | D**

Calcularemos, inicialmente, o discriminante da equação:

$$\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot (m+2) \cdot (m-1)$$

$$\Delta = 4m^2 - 4 \cdot (m^2 - m + 2m - 2)$$

$$\Delta = -4m + 8$$

Verdadeira. A equação dada terá como solução o conjunto vazio se:

$$-4m + 8 < 0 \Rightarrow -4m < -8 \Rightarrow m > 2$$

Falsa. Para que a equação admita duas raízes reais e iguais devemos ter:

$$-4m + 8 = 0 \Rightarrow -4m = -8 \Rightarrow m = 2$$

Falsa. Existem números negativos neste intervalo.

$$-4m + 8 > 0 \Rightarrow -4m > -8 \Rightarrow m < 2$$

Logo, a sequência pedida é a V – F – F.

**14 | C**

Sabendo que  $|x|^2 = x^2$ , para todo  $x$  real, temos

$$x^2 - 5|x| - 6 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 5|x| - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 6)(|x| + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 6.$$

Em consequência, das Relações de Girard, vem  $a = 0$  e  $b = 36$ .

**15 | B**

Se  $P$  é divisível por  $x - 1$ , então

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - 6 \cdot 1 + |2k - 7| = 0$$

$$\Leftrightarrow |2k - 7| = 5$$

$$\Leftrightarrow 2k - 7 = \pm 5$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \text{ ou } k = 6.$$

A resposta é  $1 + 6 = 7$ .

**16 | E**

Sendo  $x \neq -1$  e  $x \neq 0$ , temos

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6(x+1) - 6x = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

Portanto, pelas Relações de Girard, segue que o resultado é  $-1$ .

**17 | B**

Condição de Existência:

$$\begin{cases} x + \sqrt{2-x^2} \neq 0 \\ x - \sqrt{2-x^2} \neq 0 \\ 2-x^2 > 0 \end{cases}$$

Resolvendo a equação, temos:



$$\frac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \frac{2}{x-\sqrt{2-x^2}} = x \Rightarrow$$

$$\frac{2 \cdot (x - \sqrt{2-x^2}) + 2 \cdot (x + \sqrt{2-x^2})}{(x + \sqrt{2-x^2}) \cdot (x - \sqrt{2-x^2})} = \frac{x \cdot (x + \sqrt{2-x^2}) \cdot (x - \sqrt{2-x^2})}{(x + \sqrt{2-x^2}) \cdot (x - \sqrt{2-x^2})} \Rightarrow$$

$$\frac{4x}{(x + \sqrt{2-x^2}) \cdot (x - \sqrt{2-x^2})} = \frac{2x^3 - 2x}{(x + \sqrt{2-x^2}) \cdot (x - \sqrt{2-x^2})} \Rightarrow$$

$$2x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{3}$$

Considerando  $x = 0$ , a condição de existência é verificada, mas para  $x = \pm\sqrt{3}$  a condição  $2 - x^2 > 0$  não

é verificada, pois  $2 - (\pm\sqrt{3})^2 < 0$ .

Logo, o conjunto solução desta equação será dado por:  $S = \{0\}$ .

Estão corretas as afirmações [II] e [III]. Apenas a [I] é falsa.

#### 18| D

Seja  $p(x) = (x-2)^3(x-a)(x-b)$ , em que  $a$  e  $b$  são raízes de  $p$ . Logo, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x^2 - (a+b)x + ab) \\ &= x^5 - (a+b+6)x^4 + (ab+6(a+b)+12)x^3 - (6ab+12(a+b)+8)x^2 + \\ &\quad + (12ab+8(a+b))x - 8ab. \end{aligned}$$

Em consequência, vem

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\frac{a+b+6}{1} = -7 \\ -\frac{8ab}{1} = 96 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=-12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que a menor raiz de  $p$  é  $-3$ .

#### 19| ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

[A] Verdadeira: O teorema fundamental da Álgebra nos garante isso.

[B] Falsa: Seria verdadeira se a equação tivesse apenas coeficientes reais.

[C] Falsa: A equação deverá ter coeficientes reais.

[D] Falsa: Algumas equações apresentam raízes com multiplicidade maior que 1; Ex:  $(x-1)^4 = 0$ , o número 1 é raiz quatro vezes desta equação.

[E] Verdadeira: A equação  $(x-1)^4$  possui as 4 raízes iguais a 1.

A questão foi anulada, pois há duas opções corretas, [A] e [E].

#### 20| B

O número 2 é raiz da equação, pois  $2^3 - 6 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 26 = 0$ .

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos fatorar o primeiro membro da equação  $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ .

|   |   |    |     |     |
|---|---|----|-----|-----|
| 2 | 1 | -6 | +21 | -26 |
|   | 1 | -4 | +13 | 0   |

Interbilis®

$$(x-2) \cdot (x^2 - 4x + 13) = 0$$

A equação produto acima possui uma raiz real  $x = 2$  e duas raízes imaginárias  $m$  e  $n$ , obtidas com a resolução da equação  $(x^2 - 4x + 13) = 0$ .

Sabemos que:

$$(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2 \cdot m \cdot n$$

Utilizando as relações de Girard, podemos escrever que:

$$4^2 = m^2 + n^2 + 2 \cdot 13 \Rightarrow m^2 + n^2 = -10.$$

#### 21| B

Sejam  $a, b$  e  $c$  as raízes da equação, com  $a^2 = bc$ . Logo, pelas Relações de Girard, segue que

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b+c=7 \\ ab+ac+bc=k \\ abc=-216 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=7 \\ a(b+c)+a^2=k \\ a^3=-216 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=13 \\ -6 \cdot 13 + 36 = k \\ a=-6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=13 \\ k=-42 \\ a=-6 \end{cases}. \end{aligned}$$

**22 | D**

É imediato que 6 possui 4 divisores positivos, 9 possui 3 divisores positivos e 16 possui 5 divisores positivos. Logo, temos

$$(x-4)(x-3)(x-5) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60 \\ = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Portanto, comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau, vem  $b = 47$ .

**23 | ANULADA**

Questão anulada no gabarito oficial.

Se  $a$  é raiz dupla podemos dividir o polinômio  $x^4 - 2ax^3 + 9ax^2 - 6ax + 9a$  consecutivamente

por  $(x-a)$ .

|   |   |     |                     |                                         |                                                         |
|---|---|-----|---------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| a | 1 | -2a | +9a                 | -6a                                     | 9a                                                      |
| a | 1 | -a  | 9a - a <sup>2</sup> | 9a <sup>2</sup> - a <sup>3</sup> - 6a   | 9a <sup>3</sup> - a <sup>4</sup> - 6a <sup>2</sup> + 9a |
|   | 1 | 0   | 9a - a <sup>2</sup> | 18a <sup>2</sup> - 2a <sup>3</sup> - 6a | zero                                                    |
|   |   |     |                     | zero                                    |                                                         |

Resolvendo a equação, temos:

$$18a^2 - 2a^3 - 6a = 0 \Rightarrow -2a \cdot (a^2 - 9a + 3) = 0$$

Resolvendo a equação, temos:  $a = 0$  ou

$$a^2 - 9a + 3 = 0 \\ a = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{2}$$

Portanto, não há alternativa correta.

**24 | D**

Considerando que  $x = \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$ , temos:

$$x^3 = \left( \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \right)^3 + 3 \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} \right)^2 + \left( \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} \right)^3 \\ x^3 = \frac{50}{8} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} \right) \\ x^3 = \frac{50}{8} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-343}{64}} \cdot x \\ x^3 = \frac{25}{4} - \frac{21}{4}x \\ 4 \cdot x^3 + 21x - 25 = 0$$

Sabemos que 1 é raiz da equação acima, pois a soma de seus coeficientes é nula.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos fatorar a equação.

|   |   |   |    |     |
|---|---|---|----|-----|
| 1 | 4 | 0 | 21 | -25 |
| 2 | 4 | 4 | 25 | 0   |

$$(x-1) \cdot (4x^2 + 4x - 25) = 0$$

O fator do segundo grau não possui raiz real, pois seu discriminante é negativo. Portanto,  $x = 1$  é a única raiz real da equação. Logo:

$$x = \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} = 1 \in [1, 3).$$

**25 | A**

É fácil ver, por inspeção, que  $x = -1$  é raiz de  $P$ .

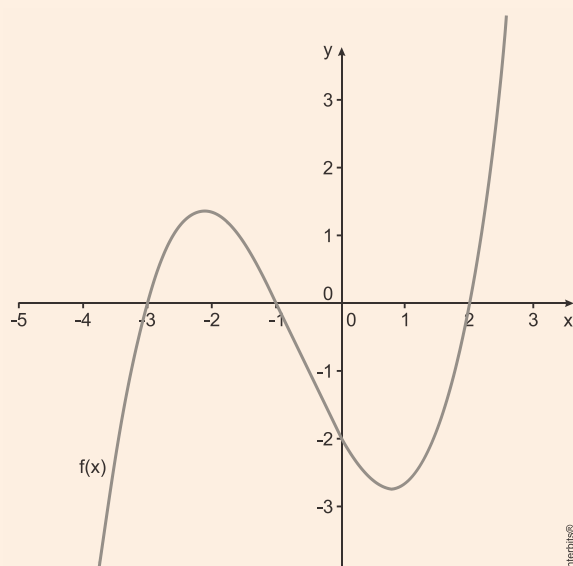
Logo, temos  $P(x) = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$ . Daí, como  $x^4 + x^2 + 1 = 0$  não possui raízes reais, podemos concluir que a única raiz real de  $P$  é  $x = -1$ .

Portanto, sendo  $M$  o conjunto das raízes reais de  $P$ , vem que a resposta é 1.

**01** O gráfico a seguir representa a função polinomial

$$f(x) = a(x - b)(x - c)(x - d).$$

O valor de  $a + b + c + d$  é:



**A** -2

**B**  $-\frac{5}{3}$

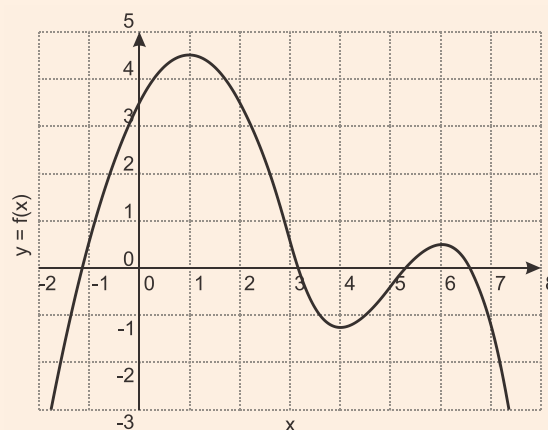
**C**  $\frac{1}{3}$

**D**  $\frac{7}{3}$

**E** 2

**02** A respeito da função representada no gráfico abaixo, considere as seguintes afirmativas:

1. A função é crescente no intervalo aberto  $(4, 6)$ .
2. A função tem um ponto de máximo em  $x = 1$ .
3. Esse gráfico representa uma função injetora.
4. Esse gráfico representa uma função polinomial de terceiro grau.



Assinale a alternativa correta.

- A** Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
- B** Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
- C** Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.
- D** Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
- E** Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.

**03** Um professor de matemática apresentou a seguinte função quadrática para os seus alunos:  $F_1(x) = x^2 - 2x + 1$ . Em seguida, começou a alterar os valores do termo independente de  $x$  dessa função, obtendo três novas funções:

$$F_2(x) = x^2 - 2x + 8;$$

$$F_3(x) = x^2 - 2x + 16;$$

$$F_4(x) = x^2 - 2x + 32.$$

Sobre os gráficos de  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$  e  $F_4(x)$ , em relação ao gráfico da função  $F_1(x)$ , é CORRETO afirmar que

- A** interceptarão o eixo "x" nos mesmos pontos.
- B** interceptarão o eixo "y" nos mesmos pontos.
- C** terão o mesmo conjunto imagem.
- D** terão a mesma abscissa (terão o mesmo "x" do vértice).
- E** terão a mesma ordenada (terão o mesmo "y" do vértice).



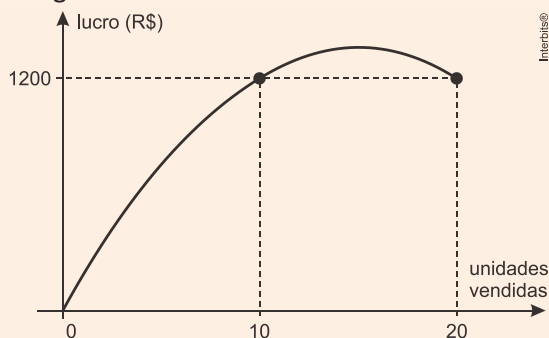
**04** | A função definida por  $f(x) = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais, representa quanto José tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Assim,  $x$  é um número natural tal que  $1 \leq x \leq 31$  e  $f(x)$  é o valor, em reais, que José tinha em sua carteira no final do dia  $x$ . Da mesma forma, a função  $g(x) = mx + n$  onde  $m$  e  $n$  são constantes reais, representa quanto Paulo tinha em sua carteira ao final de cada um dos últimos 31 dias. Saiba-se que no final do:

- primeiro dia, José e Paulo não tinham dinheiro em suas carteiras.
- segundo dia, Paulo tinha R\$ 7,00.
- dia 16, José tinha R\$ 120,00.
- dia 31, José não tinha dinheiro em sua carteira.

Com base nestas informações, é CORRETO afirmar que

- A** ao final do dia  $x$ , a soma dos valores que José e Paulo tinham nas carteiras é  $S = \frac{-8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1)$ .
- B** ao final do dia 18, José tinha R\$ 5,00 a mais do que Paulo.
- C** a expressão da função que representa a soma dos valores que José e Paulo têm na carteira no dia  $x$  é um polinômio de grau 3.
- D**  $f(x) = -x^2 + 32x - 31$ .
- E** Paulo nunca teve em sua carteira um valor maior do que José.

**05** | O lucro de uma pequena empresa é dado por uma função quadrática cujo gráfico está representado na figura abaixo:



Podemos concluir que o lucro máximo é de:

- A** R\$ 1.280,00
- B** R\$ 1.400,00
- C** R\$ 1.350,00
- D** R\$ 1.320,00
- E** R\$ 1.410,00

**06** | Se  $x$  e  $y$  são números reais tais que  $5y + 2x = 10$ , então, o menor valor que  $x^2 + y^2$  pode assumir é

- A**  $\frac{70}{13}$ .
- B**  $\frac{97}{17}$ .
- C**  $\frac{100}{29}$ .
- D**  $\frac{85}{31}$ .

**07** | Considere o polinômio  $p$  definido por  $p(x) = x^2 + 2(n+2)x + 9n$ .

Se as raízes de  $p(x) = 0$  são iguais, os valores de  $n$  são

- A** 1 e 4.
- B** 2 e 3.
- C** -1 e 4.
- D** 2 e 4.
- E** 1 e -4.

**08** | Uma parábola  $P_1$  de equação  $y = x^2 + bx + c$ , quando refletida em relação ao eixo  $x$ , gera a parábola  $P_2$ . Transladando horizontalmente  $P_1$  e  $P_2$  em sentidos opostos, por quatro unidades, obtemos parábolas de equações  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$ .

Nas condições descritas, o gráfico de  $y = (f+g)(x)$  necessariamente será

- A** uma reta.
- B** uma parábola.
- C** uma hipérbole.
- D** uma exponencial.
- E** um círculo.

**09** | Dadas as funções  $f$  e  $g$ , definidas por  $f(x) = x^2 + 1$  e  $g(x) = x$ , o intervalo tal que  $f(x) > g(x)$  é

- A**  $\left( \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$ .



**B**  $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ .

**C**  $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$ .

**D**  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

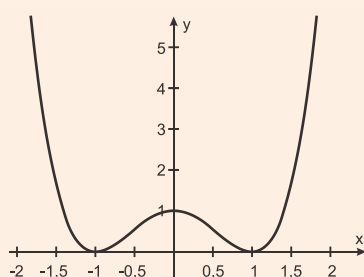
**E**  $(-\infty, +\infty)$ .

**10** Durante 16 horas, desde a abertura de certa confeitaria, observou-se que a quantidade  $q(t)$  de unidades vendidas do doce “amor em pedaço”, entre os instantes  $(t-1)$  e  $t$ , é dada pela lei  $q(t) = ||t-8| + t-14|$ , em que  $t$  representa o tempo, em horas, e  $t \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}$ .

É correto afirmar que

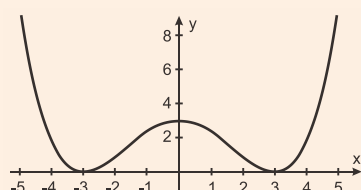
- A** entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de “amor em pedaço”.
- B** a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.
- C** em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.
- D** o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

**11** Sabendo-se que o gráfico da função  $y = f(x)$  é

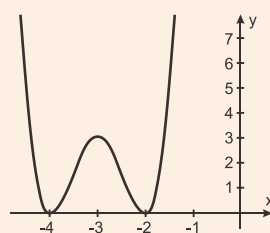


o gráfico que melhor representa a função  $y = 3f(x-3)$  é

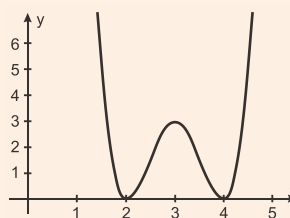
**A**



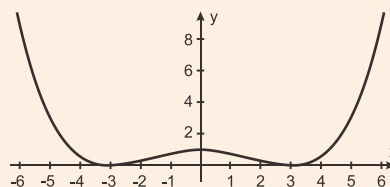
**B**



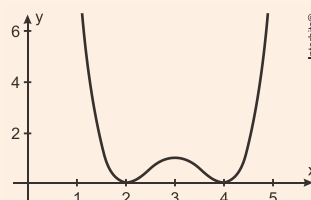
**C**



**D**



**E**



**12** Os gráficos de  $f(x) = 2$  e  $g(x) = x^2 - |x|$  têm dois pontos em comum. O valor da soma das abscissas dos pontos em comum é igual a

- A** 0
- B** 4
- C** 8
- D** 10
- E** 15

**13** Seja  $f$  uma função real tal que  $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x-1$ , para todo  $x$  real não nulo.

Se  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , o valor de  $f(\sin^2 \theta)$  é:





**A**  $\text{sen}^2$  è

**B**  $\cos^2$  è

**C**  $\text{tg}^2$  è

**D**  $\sec^2$  è

**E**  $\text{cosec}^2$  è

**14** A função real de variável real definida por  $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$ , para  $x \neq -\frac{1}{4}$  é invertível. Sua inversa  $g$  pode ser expressa na forma  $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , onde  $a, b, c$  e  $d$  são números inteiros.

Nessas condições, a soma  $a+b+c+d$  é um número inteiro múltiplo de

**A** 6.

**B** 5.

**C** 4.

**D** 3.

**15** Seja  $f(x)$  uma função tal que para todo número real  $x$  temos que  $xf(x-1) = (x-3)f(x) + 3$ . Então,  $f(1)$  é igual a

**A** 0.

**B** 1.

**C** 2.

**D** 3.

**16** Se  $f$  é a função real de variável real definida por  $f(x) = \log(4-x^2) + \sqrt{4x-x^2}$ , então, o maior domínio possível para  $f$  é

Dados:  $\log x \equiv$  logaritmo de  $x$  na base 10

**A** {números reais  $x$  tais que  $0 \leq x < 4$ }.

**B** {números reais  $x$  tais que  $2 < x < 4$ }.

**C** {números reais  $x$  tais que  $-2 < x < 4$ }.

**D** {números reais  $x$  tais que  $0 \leq x < 2$ }.

### TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o gráfico referente ao rendimento médio mensal na Região Metropolitana de Belo Horizonte (BH), no período de 2010 a 2013, para responder à(s) questão(ões).



**17** Índices ou coeficientes como o IDH ou o de Gini servem para que a comparação dos dados de países ou regiões seja realizada de modo mais objetivo.

Suponha que seja criado o Coeficiente de Desigualdade de Rendimento entre os Sexos, o CDRS. Quando o CDRS é igual a zero, há ausência de desigualdade de rendimento entre os sexos; quando o CDRS é igual a 1, a desigualdade é dita plena e, nesse caso, o rendimento dos homens supera em muito o rendimento das mulheres.

Para calcular o CDRS deve-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\text{CDRS} = 1 - \left( \frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H} \right),$$

sendo:

-  $M$ , o número de mulheres de uma determinada região;

-  $R_M$ , a média mensal dos rendimentos das mulheres dessa região;

-  $H$ , o número de homens dessa mesma região; e

-  $R_H$ , a média mensal dos rendimentos dos homens dessa região.

Com base na série histórica dos rendimentos de homens e de mulheres, observou-se que a razão  $\frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H}$  pertence ao intervalo real  $[0, 1]$ .

Admita que na região metropolitana de BH, em 2013, havia 1.200.000 mulheres e 1.000.000 de homens.

O valor do CDRS para a região metropolitana de BH em 2013 é, aproximadamente, igual a

**A** 0,12**B** 0,16**C** 0,20**D** 0,24**E** 0,28

## GABARITO

### 01 | B

Calculando:

Das intersecções do gráfico, tem-se:

$$f(x) = a(x-2)(x+1)(x+3)$$

se  $a = 1$ :

$$f'(0) = (0-2)(0+1)(0+3) = -6 \Rightarrow \text{intersecção em } (-6, 0)$$

$$\text{mas a intersecção é } (-2, 0) \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x+1)(x+3)$$

$$a+b+c+d = \frac{1}{3} + 2 - 1 - 3 = -\frac{5}{3}$$

### 02 | A

[1] Verdadeira. Com efeito, pois para quaisquer  $x_1, x_2 \in (4, 6)$ , com  $x_1 < x_2$ , tem-se  $f(x_1) < f(x_2)$ .[2] Verdadeira. Vamos supor que o domínio de  $f$  seja o conjunto dos números reais. Logo, desde que, para todo elemento  $x$  do domínio de  $f$ , se verifica  $f(x) \leq f(1)$ , podemos concluir que  $f$  tem um ponto de máximo em  $x = 1$ .[3] Falsa. Basta observar que  $f$  possui mais de uma raiz real.[4] Falsa. O gráfico de  $f$  corta o eixo das abscissas em quatro pontos. Logo,  $f$  possui no mínimo quatro raízes reais e, portanto, não pode ser uma função polinomial de terceiro grau.

### 03 | D

[A] Falsa, pois terão raízes distintas (facilmente comprovado pelas Relações de Girard).

[B] Falsa, pois se substituirmos  $x$  por zero em cada uma das funções, percebe-se que elas cortam o eixo  $y$  em diferentes pontos.

[C] Falsa, pois terão raízes distintas.

[D] Verdadeira, pois o “ $x$ ” do vértice independe do valor do termo independente.[E] Falsa, pois o “ $y$ ” do vértice depende do valor do termo independente.

### 04 | A

Sabendo que  $f(1) = 0$ ,  $f(16) = 120$  e  $f(31) = 0$ , temos

$$\begin{cases} c = 0 \\ 225a + 15b = 120 \\ 900a + 30b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 15a + b = 8 \\ b = -30a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 16 \\ a = -\frac{8}{15} \end{cases}$$

$$\text{Logo, vem } f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1).$$

Por outro lado, se  $g(1) = 0$  e  $g(2) = 7$  então

$$\begin{cases} m+n=0 \\ 2m+n=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ n=-7 \end{cases}$$

$$\text{Daí, temos } g(x) = 7x - 7.$$

[A] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1) + 7(x-1) \\ &= -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 23(x-1). \end{aligned}$$

[B] Falsa. Tem-se que

$$\begin{aligned} f(18) - g(18) &= -\frac{8}{15}(18-1)^2 + 9(18-1) \\ &= \frac{2159}{15} \\ &> \frac{75}{15}. \end{aligned}$$

[C] Falsa. Conforme [A].

[D] Falsa. Na verdade, sabemos que

$$f(x) = -\frac{8}{15}(x-1)^2 + 16(x-1).$$

[E] Falsa. Suponhamos, por absurdo, que  $g(x) - f(x) \leq 0$ , para todo natural  $x$ , com  $1 \leq x \leq 31$ .



Tem-se que

$$7(x-1) + \frac{8}{15}(x-1)^2 - 16(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{15}(x-1)^2 - 9(x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x - \frac{143}{8}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 17.$$

Portanto, existem valores de  $x$ , com  $1 \leq x \leq 31$ , para os quais  $g(x) - f(x) > 0$ . Contradição.

### 05 | C

Seja  $L = ax^2 + bx + c$ , com  $L$  sendo o lucro obtido com a venda de  $x$  unidades. É fácil ver que  $c = 0$ . Ademais, como a parábola passa pelos pontos  $(10, 1200)$  e  $(20, 1200)$ , temos

$$\begin{cases} 100a + 10b = 1200 \\ 400a + 20b = 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 180 \end{cases}.$$

Portanto, segue que

$$L = -6x^2 + 180x = 1350 - 6(x-15)^2.$$

O lucro máximo ocorre para  $x=15$  e é igual a R\$ 1.350,00.

### 06 | C

Desde que  $y = \frac{10-2x}{5}$ , temos

$$x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{10-2x}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{25} \cdot (29x^2 - 40x + 100).$$

Logo, sendo  $-\frac{(-40)^2 - 4 \cdot 29 \cdot 100}{4 \cdot 29} = \frac{2500}{29}$  o valor mínimo de  $29x^2 - 40x + 100$ , podemos concluir que o

$$\text{resultado é } \frac{1}{25} \cdot \frac{2500}{29} = \frac{100}{29}.$$

### 07 | A

Fazendo  $P(x) = 0$ , temos:

$$0 = x^2 + 2(n+2)x + 9n.$$

Para que as duas raízes sejam iguais devemos considerar o discriminante nulo.

$$\Delta = 0$$

$$(2 \cdot (n+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9n = 0$$

$$4 \cdot (n^2 + 4n + 4 - 9n) = 0$$

$$n^2 - 5n + 4 = 0 \Rightarrow n = 1 \text{ ou } n = 4$$

### 08 | A

É imediato que a equação de  $P_2$  é  $y = -x^2 - bx - c$ . Agora, devemos considerar dois casos: (i)  $P_1$  deslocada para a esquerda e  $P_2$  deslocada para a direita; (ii)  $P_1$  deslocada para a direita e  $P_2$  deslocada para a esquerda.

No primeiro caso, temos  $f(x) = (x+4)^2 + b(x+4) + c$  e  $g(x) = -(x-4)^2 - b(x-4) - c$ . Logo, vem

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$= (x+4)^2 + b(x+4) + c - (x-4)^2 - b(x-4) - c$$

$$= 16x + 8b.$$

Por outro lado, no segundo caso, de maneira inteiramente análoga, encontramos  $(f+g)(x) = -16x - 8b$ .

Assim, em qualquer caso, o gráfico de  $y = (f+g)(x)$  é uma reta.

### 09 | E

$$f(x) > g(x)$$

$$x^2 + 1 > x$$

$$x^2 - x + 1 > 0$$

A equação  $x^2 - x + 1 = 0$  não possui raízes reais, logo  $x^2 - x + 1 > 0$  para todo o  $x$ , concluímos que a solução desta inequação é o conjunto dos números reais que também poderá ser representado por  $(-\infty, +\infty)$ .

### 10 | D

Calculando:

$$q(t) = ||t-8| + t - 14|$$

$$t \in \{1, 2, 3, \dots, 16\}$$

$$t = 8 \rightarrow q(t) = |8-14| \rightarrow q(t) = 6$$

$$t < 8 \rightarrow q(t) = |-(t-8) + t - 14| \rightarrow q(t) = 6$$

$$t = 16 \rightarrow q(t) = |8+16-14| \rightarrow q(t) = 10$$

$$8 < t < 16 \rightarrow q(t) = 2 \cdot |t-11|$$

$$q(t) \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Assim, a única alternativa correta é a letra D.

**11 | C**

O gráfico da função  $g$ , dada por  $g(x) = f(x - 3)$ , corresponde ao gráfico de  $y = f(x)$  deslocado de três unidades no sentido positivo do eixo das abscissas. Ademais, o gráfico da função  $h$ , dada por  $h(x) = 3g(x)$ , corresponde ao gráfico de  $g$  dilatado verticalmente por um fator igual a 3.

Portanto, o gráfico da alternativa [C] é o que melhor representa a função  $h$ .

**12 | A**

Igualando as duas funções, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - |x| &= 2 \Leftrightarrow x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ |x| &= \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow |x| = 2 \text{ ou } |x| = -1 \text{ (não convém)} \\ \text{Se } |x| &= 2 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

Portanto, a soma das abscissas dos pontos em comum será  $-2 + 2 = 0$ .

**13 | C**

Calculando:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x-1}{x}\right) &= x-1 \\ f(g(x)) &= x-1 \\ g(x) &= \frac{x-1}{x} \\ g(x) &= \frac{x-1}{x} = \text{sen}^2 \hat{e} \Rightarrow x-1 = x \cdot \text{sen}^2 \hat{e} \Rightarrow x - x \cdot \text{sen}^2 \hat{e} = 1 \Rightarrow x \cdot (1 - \text{sen}^2 \hat{e}) = 1 \\ x &= \frac{1}{1 - \text{sen}^2 \hat{e}} = \frac{1}{\cos^2 \hat{e}} \\ \text{quando } x &= \frac{1}{\cos^2 \hat{e}} \Rightarrow f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = f(\text{sen}^2 \hat{e}) \\ f(\text{sen}^2 \hat{e}) &= \frac{1}{\cos^2 \hat{e}} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \hat{e}}{\cos^2 \hat{e}} = \frac{\text{sen}^2 \hat{e}}{\cos^2 \hat{e}} = \left(\frac{\text{sen} \hat{e}}{\cos \hat{e}}\right)^2 \\ f(\text{sen}^2 \hat{e}) &= \text{tg}^2 \hat{e} \end{aligned}$$

**14 | C**

Se  $f(x) = \frac{2x+3}{4x+1}$ , então

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+3}{4x+1} \Leftrightarrow 4xy + y = 2x + 3 \\ \Leftrightarrow x(4y - 2) &= -y + 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{y-3}{-4y+2} \end{aligned}$$

Portanto, temos  $g(x) = \frac{x-3}{-4x+2}$  e, assim, desde que  $1-3-4+2 = (-1) \cdot (4)$ , podemos afirmar que a soma  $a+b+c+d$  é um número inteiro múltiplo de 4.

**15 | B**

Calculando:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ 0 \cdot f(0-1) &= (0-3) \cdot f(0) + 3 \rightarrow f(0) = 1 \\ x &= 1 \\ 1 \cdot f(1-1) &= (1-3) \cdot f(1) + 3 \rightarrow f(0) = -2 \cdot f(1) + 3 \rightarrow f(1) = 1 \end{aligned}$$

**16 | D**

O maior domínio possível para  $f$  corresponde ao conjunto de números reais que satisfazem simultaneamente as desigualdades  $4 - x^2 > 0$  e  $x^2 - 4x \leq 0$ . Desse modo, como

$$4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

e

$$x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4,$$

podemos concluir que a resposta é  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$ .

**17 | B**

$$\text{CDRS} = 1 - \left( \frac{M \cdot R_M}{H \cdot R_H} \right) = 1 - \frac{1200000 \cdot 1410}{1000000 \cdot 2022} = 1 - \frac{16920}{20220} \approx 0,16$$

## GEOMETRIA ESPACIAL

10

01| Considere os planos definidos por:

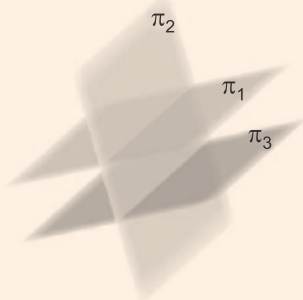
$$\pi_1 : 2x - 3y + z = 1;$$

$$\pi_2 : -x + y + 2z = 0 \quad \text{e}$$

$$\pi_3 : -4x + 6y - 2z = -2.$$

Qual das figuras a seguir pode descrever a posição relativa desses três planos no espaço?

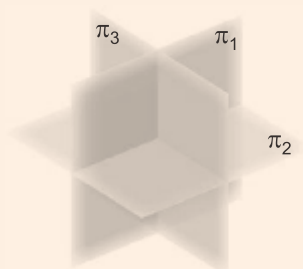
A



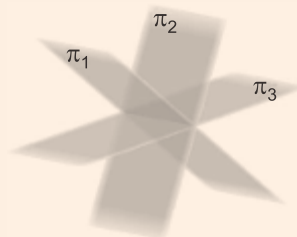
B



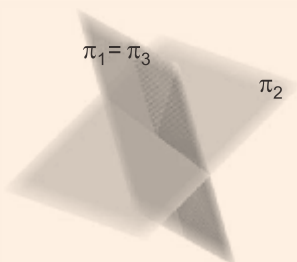
C



D

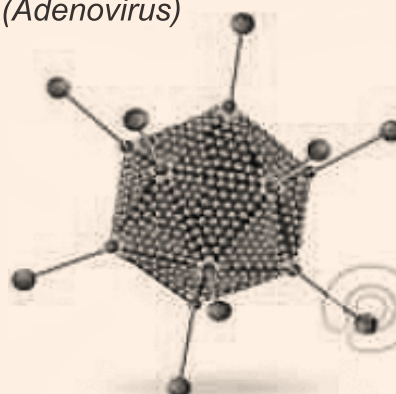


E



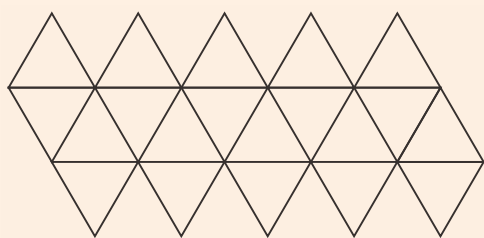
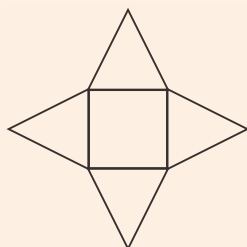
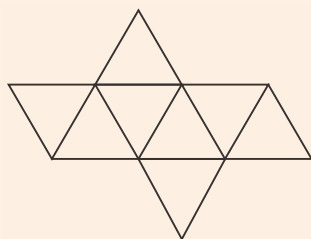
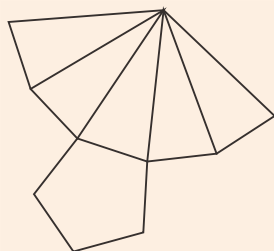
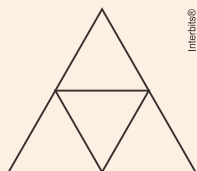
02| Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.

**Polyhedral**  
(Adenovirus)



Disponível em:  
<<http://www.thinkstockphotos.com/image/stockillustration-shapes-of-viruses/507687357>>.  
Acesso em: 14 set. 2016.

Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

**A****B****C****D****E**

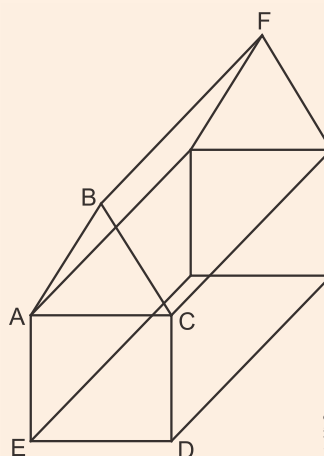
**03** Cada aresta de um cubo é pintada de verde ou de amarelo.

Após a pintura, em cada face desse cubo há pelo menos uma aresta pintada de verde.

O número máximo de arestas desse cubo pintadas de amarelo é:

**A** 6**B** 9**C** 8**D** 10**E** 4

**04** Na figura a seguir, os pontos A, B, C formam um triângulo equilátero de lado  $x$ , os pontos A, C, D, E um quadrado e o segmento BF é o dobro do tamanho de CD.



Considerando-se os dados apresentados, verifica-se que a distância do ponto F ao ponto E é

**A**  $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$

**B**  $\frac{x^2(\sqrt{3}-1)}{2}$

**C**  $x^2 + \sqrt{3}x$

**D**  $\frac{4x^2\sqrt{3}x}{2}$

**E**  $x^2(8 + \sqrt{3})$

**05** Um quebra-cabeça tem 8 peças, sendo:

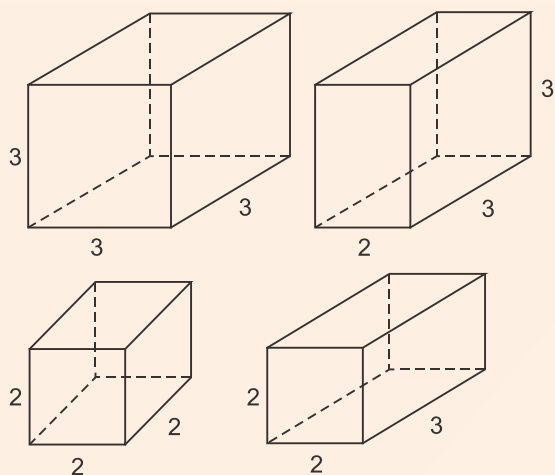
- 01 peça cúbica com 2 cm de lado

- 01 peça cúbica com 3 cm de lado

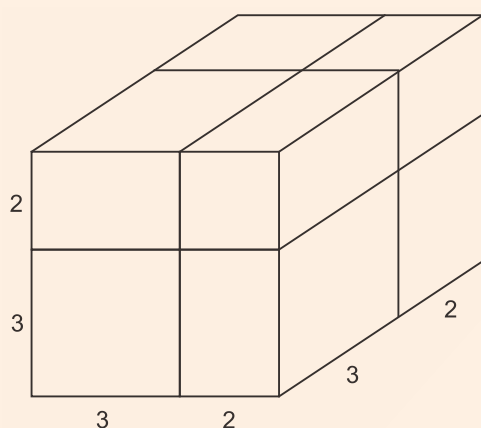
- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas  $2\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$

- 03 peças em forma de paralelepípedo retangular com medidas  $3\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 2\text{ cm}$





Além disso, o quebra-cabeça montado é um cubo  $5 \times 5 \times 5$  conforme ilustração abaixo.



Se pintarmos todas as faces do cubo montado, após desmontá-lo podemos afirmar que as peças:

- A** cúbicas totalizam 5 faces não pintadas.
- B** cúbicas totalizam 5 faces pintadas.
- C**  $2 \times 2 \times 3$  totalizam  $16 \text{ cm}^2$  de área de faces não pintadas.
- D**  $3 \times 3 \times 2$  totalizam  $63 \text{ cm}^2$  de área de faces não pintadas.
- E** não cúbicas totalizam 15 faces não pintadas.

**06** A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores abaixo mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

- A** 37.500 litros.
- B** 375.000 litros.
- C** 3.750.000 litros.
- D** 37.500.000 litros.
- E** 375.000.000 litros.

**07** Um cubo de lado  $2a$  possui uma esfera circunscrita nele. Qual é a probabilidade de, ao ser sorteado um ponto interno da esfera, esse ponto ser interno ao cubo?

- A**  $\frac{\delta}{6}$
- B**  $\frac{2\sqrt{3}}{3\delta}$
- C**  $\frac{\delta\sqrt{3}}{6}$
- D**  $\frac{2\delta}{6\sqrt{3}}$
- E**  $\frac{1}{2}$

**08** O líquido AZ não se mistura com a água. A menos que sofra alguma obstrução, espalha-se de forma homogênea sobre a superfície da água formando uma fina película circular com 0,2 cm de espessura. Uma caixa em forma de paralelepípedo retangular, com dimensões de 7 cm, 10 cm e 6 cm, está completamente cheia do líquido AZ. Seu conteúdo é, então, delicadamente derramado em um grande recipiente com água.

O raio da película circular que o líquido AZ forma na superfície da água, em centímetros, é:

- A**  $\frac{1}{10}\sqrt{\frac{21}{\delta}}$
- B**  $\sqrt{\frac{210}{\delta}}$
- C**  $10\sqrt{\frac{21}{\delta}}$
- D**  $\sqrt{\frac{21}{10\delta}}$
- E**  $\frac{\sqrt{21}}{10\delta}$



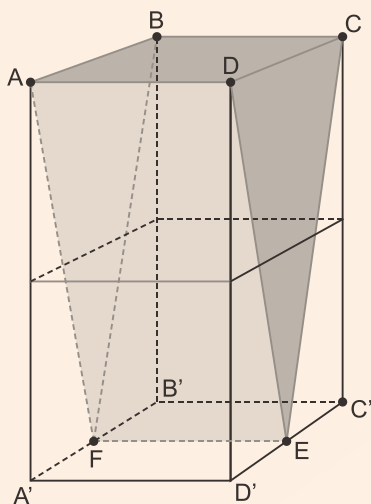


**09** | Muitos prédios que estão sendo construídos em nossa cidade possuem caixas d'água com a forma de um paralelepípedo. Um construtor quer adquirir duas delas que tenham internamente a mesma altura, mas diferindo na base, que deverá ser quadrada em ambas. A primeira deverá ter capacidade para 16.000 litros, e a segunda para 25.000 litros. A razão entre a medida do lado da base da primeira e a da segunda, em decímetros, é

- A** 0,08
- B** 0,60
- C** 0,75
- D** 0,80
- E** 1,25

**10** | Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios F e E das arestas A'B' e C'D', respectivamente.

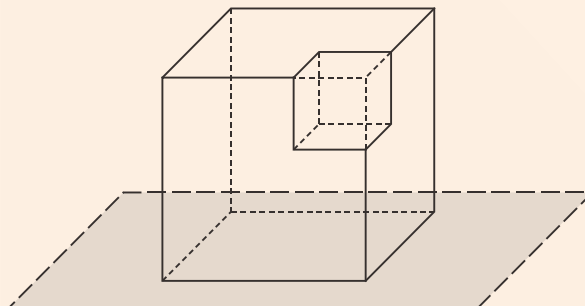
A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir.



O volume do sólido ABCDEF, em  $\text{cm}^3$ , é igual a:

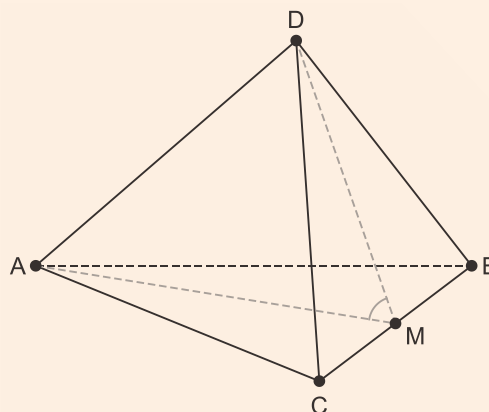
- A** 4
- B** 6
- C** 8
- D** 12

**11** | Um sólido foi construído removendo-se um cubo menor de um cubo maior, como mostra a figura a seguir. Se a diferença entre as medidas das arestas dos dois cubos é de 4 cm e a medida do volume do sólido é  $208 \text{ cm}^3$ , qual a medida da área lateral da superfície do sólido?



- A**  $136 \text{ cm}^2$
- B**  $144 \text{ cm}^2$
- C**  $160 \text{ cm}^2$
- D**  $204 \text{ cm}^2$
- E**  $216 \text{ cm}^2$

**12** | Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admita que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é M.



O cosseno do ângulo  $\widehat{AMD}$  equivale a:

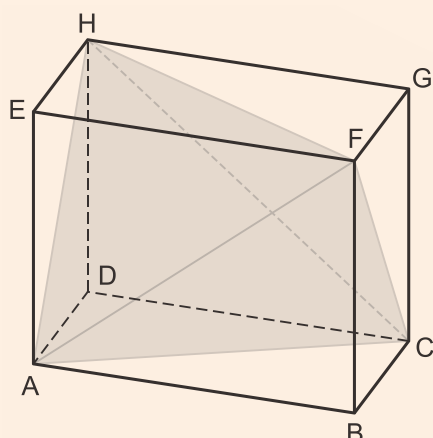
- A**  $\frac{1}{2}$
- B**  $\frac{1}{3}$



**C**  $\frac{2}{3}$

**D**  $\frac{2}{5}$

**13** Considere ABCDEFGH paralelepípedo reto-reângulo, indicado na figura abaixo, tal que  $\overline{AB} = 4$ ,  $\overline{AE} = 3$  e  $\overline{BC} = 2$ .



O volume do tetraedro AHFC é

**A** 4.

**B** 8.

**C** 12.

**D** 16.

**E** 18.

**14** Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3 m de altura e cada aresta da base medirá 2 m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento.

Se a medida do lado de cada folha é igual a 20 cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será

Utilize  $\sqrt{10} \approx 3,2$

**A** 285

**B** 301

**C** 320

**D** 333

**15** Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é  $30\sqrt{3} \text{ cm}^2$  e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

**A**  $50 \text{ cm}^3$

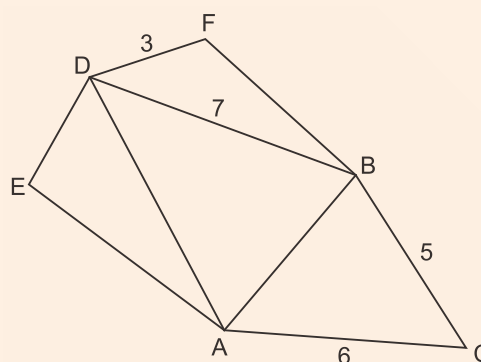
**B**  $42\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

**C**  $43\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$

**D**  $43\sqrt{2} \text{ cm}^3$

**E**  $42\sqrt{3} \text{ cm}^3$

**16** Considere a planificação de um tetraedro, conforme a figura abaixo.



Os triângulos ABC e ABD são isósceles respectivamente em B e D. As medidas dos segmentos  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{DF}$  estão indicadas na figura.

A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é

**A** 33.

**B** 34.

**C** 43.

**D** 47.

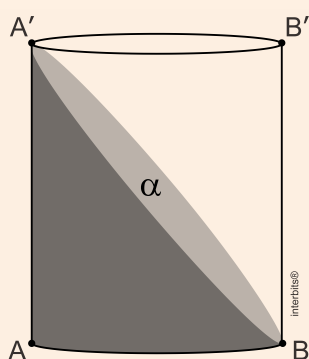
**E** 48.

**17** Determine o volume (em  $\text{cm}^3$ ) de uma pirâmide retangular de altura "a" e lados da base "b" e "c" (a, b e c em centímetros), sabendo que  $a+b+c = 36$  e "a", "b" e "c" são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.



- A** 16
- B** 36
- C** 108
- D** 432
- E** 648

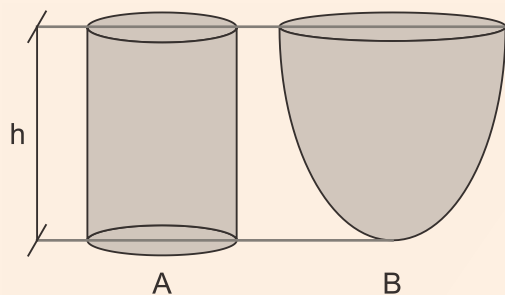
**18** Um cilindro circular reto possui diâmetro  $AB$  de 4 cm e altura  $AA'$  de 10 cm. O plano  $\alpha$  perpendicular à seção meridiana  $ABB'A'$ , que passa pelos pontos  $B$  e  $A'$  das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



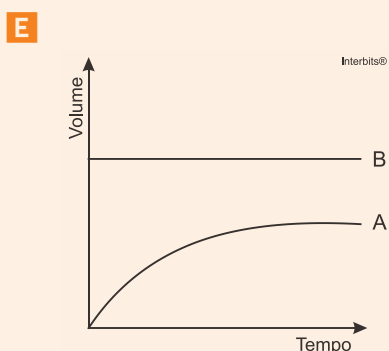
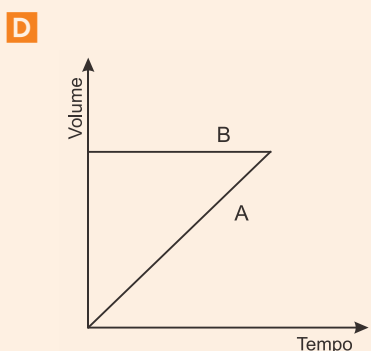
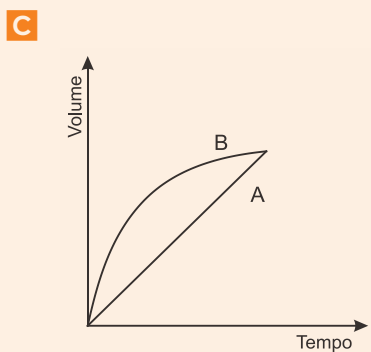
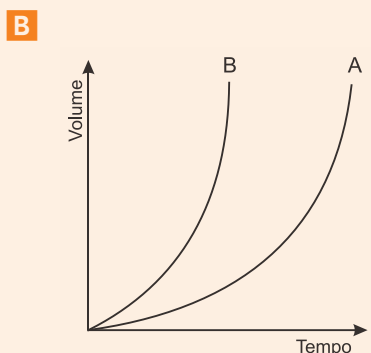
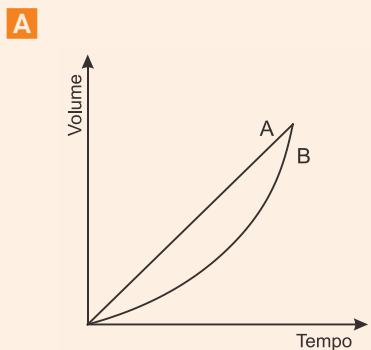
O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano  $\alpha$  e a base inferior, em  $\text{cm}^3$ , é igual a:

- A**  $8\pi$
- B**  $12\pi$
- C**  $16\pi$
- D**  $20\pi$

**19** Dois vasilhames A e B, representados a seguir, possuem a mesma capacidade e foram cheios por duas torneiras que mantiveram a mesma vazão de água no mesmo intervalo de tempo.



Identifique qual dos gráficos melhor representa o momento em que os dois vasilhames estavam sendo cheios e atingiram a altura  $h$ .





**20** O volume do cilindro circular reto que se obtém aumentando-se  $x$  metros no raio da base desse cilindro, com  $x \neq 0$ , é igual ao do que se obtém aumentando-se  $x$  metros na sua altura.

Nessas condições,  $x$  é um

- A** produto de dois números primos.
- B** número primo maior do que 5.
- C** número irracional.
- D** divisor de 64.
- E** múltiplo de 7.

**21** Com uma chapa de um certo material na forma de um setor circular de ângulo central igual a  $\frac{\pi}{4}$  radianos e raio igual a 5 dm, constrói-se um cone circular de volume  $V$ . Diminuindo-se em 20% o valor do raio e mantendo-se o mesmo ângulo central, a capacidade do novo cone diminui:

- A** entre 49% e 50%.
- B** entre 48% e 49%.
- C** entre 50% e 51%.
- D** entre 51% e 52%.

**22** Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

- A**  $\frac{1}{2}$
- B**  $\frac{1}{5}$
- C** 3
- D** 4
- E** 5

**23** Um cone reto está inscrito num cubo de aresta 8 cm. Se a altura do cone e o diâmetro de sua base têm medidas iguais, qual é a diferença entre as medidas dos seus volumes? Considere  $\pi = 3,0$ .

- A**  $128 \text{ cm}^3$
- B**  $256 \text{ cm}^3$
- C**  $384 \text{ cm}^3$
- D**  $424 \text{ cm}^3$
- E**  $512 \text{ cm}^3$

**24** Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a 8 m. Sua altura é igual a 12 m. A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

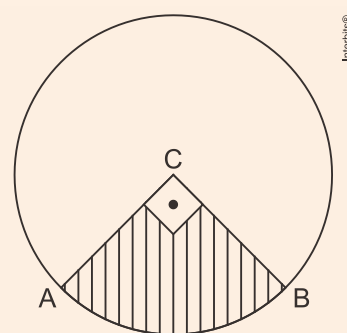
Dados:

-  $\pi$  é aproximadamente 3,14.

- O volume  $V$  do cone circular reto de altura  $h$  e raio da base  $r$  é  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

- A** 4 horas e 50 minutos.
- B** 5 horas e 20 minutos.
- C** 5 horas e 50 minutos.
- D** 6 horas e 20 minutos.
- E** 6 horas e 50 minutos.

**25** Corta-se de uma circunferência de raio 4 cm, um setor circular de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  rad (ver desenho ilustrativo), onde o ponto  $C$  é o centro da circunferência. Um cone circular reto é construído a partir desse setor circular ao se juntar os raios  $CA$  e  $CB$ .



desenho ilustrativo – fora de escala

O volume desse cone, em  $\text{cm}^3$ , é igual a

- A**  $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi$
- B**  $\frac{\sqrt{3}}{5} \pi$
- C**  $\frac{\sqrt{15}}{3} \pi$



**D**  $\frac{\sqrt{15}}{5}\pi$

**E**  $\frac{\sqrt{5}}{5}\pi$

**26** Um escultor irá pintar completamente a superfície de uma esfera de 6 m de diâmetro, utilizando uma tinta que, para essa superfície, rende  $3 \text{ m}^2$  por litro. Para essa tarefa, o escultor gastará, no mínimo, \_\_\_\_\_ litros de tinta. (Considere  $\pi \cong 3$ )

**A** 18

**B** 24

**C** 36

**D** 48

**27** Ao triplicarmos o raio e tomarmos a terça parte de uma esfera, ela possuirá, em relação à esfera original, um volume

**A** 2 vezes maior

**B** 3 vezes maior

**C** 9 vezes maior

**D** 12 vezes maior

**E** 20 vezes maior

**28** Considere dois troncos de pirâmides retas exatamente iguais. A base maior é um quadrado de lado igual a 2 metros, a base menor um quadrado de lado igual a 1 metro, e a distância entre as bases igual a 1 metro. Um monumento foi construído justapondo-se esses dois troncos nas bases menores, apoiando-se em um piso plano por meio de uma das bases maiores, formando um sólido. Desta maneira, a medida da área da superfície exposta do monumento é, em  $\text{m}^2$ , igual a

**A**  $4 + 6\sqrt{5}$ .

**B** 8.

**C**  $12\sqrt{2} + 4$ .

**D**  $\frac{16}{3}$ .

**E**  $12\sqrt{2} - 8$ .

**29** Considerando-se um cubo cuja medida de cada aresta é igual a 1 m pode-se afirmar corretamente que a medida do volume do poliedro convexo cujos vértices são os centros das faces desse cubo é

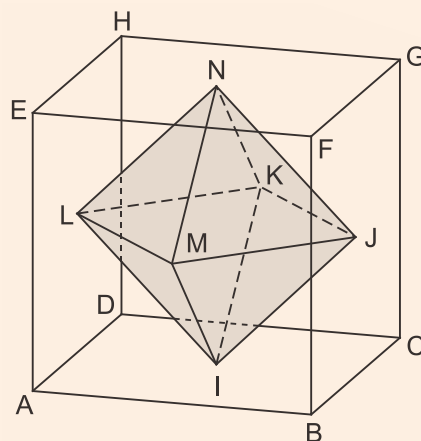
**A**  $\frac{2}{3} \text{ m}^3$ .

**B**  $\frac{2}{7} \text{ m}^3$ .

**C**  $\frac{1}{6} \text{ m}^3$ .

**D**  $\frac{4}{7} \text{ m}^3$ .

**30** Considere um cubo de aresta  $a$ . Os pontos I, J, K, L, M e N são os centros das faces ABCD, BCFG, DCGH, ADHE, ABFE e EFGH, respectivamente, conforme representado na figura abaixo.



O octaedro regular, cujos vértices são os pontos I, J, K, L, M e N, tem aresta medindo

**A**  $a\sqrt{3}$ .

**B**  $a\sqrt{2}$ .

**C**  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**D**  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .

**E**  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**31** Um cubo cuja medida de cada aresta é 3 dm está inscrito em uma esfera de raio  $R$ . A medida de um diâmetro ( $2R$ ) da esfera é

**A**  $2\sqrt{3} \text{ dm}$ .

**B**  $3\sqrt{2} \text{ dm}$ .



**C**  $3\sqrt{3}$  dm.

**D**  $4\sqrt{3}$  dm.

**32** | Uma esfera está inscrita num cilindro equilátero cuja área lateral mede  $16\pi$  cm<sup>2</sup>. O volume da esfera inscrita é

**A**  $8\pi$

**B**  $16\pi$

**C**  $\frac{32}{3}\pi$

**D**  $\frac{256}{3}\pi$

## GABARITO

**01** | **E**

Analisando  $\delta_1$  e  $\delta_3$  pode-se escrever:

$$-4x + 6y - 2z + 2 = -2 \cdot (2x - 3y + z - 1) \Rightarrow \delta_1 = \delta_3$$

Logo, estes planos serão coincidentes. O plano  $\delta_2$  será concorrente aos outros planos (não há proporcionalidade entre seus coeficientes  $a, b$  e  $c$ , logo não serão nem coincidentes nem paralelos, podendo apenas ser concorrentes). A alternativa correta será a letra [E].

**02** | **A**

O sólido da figura é um icosaedro. Portanto, só pode ser a alternativa [A].

**03** | **B**

Para que em cada face desse cubo exista pelo menos uma aresta pintada de verde é preciso que no mínimo 3 arestas estejam pintadas de verde. Como o cubo possui 12 arestas, o número máximo de arestas desse cubo pintadas de amarelo será igual a 9.

**04** | **ANULADA**

Gabarito Oficial: [E]

Gabarito SuperPro®: ANULADA

Seja  $A'C'D'E'$  a face oposta à face  $ACDE$ . Considerando o triângulo isósceles  $A'E'F$ , pela Lei dos Cossenos, vem

$$\begin{aligned}\overline{E'F}^2 &= \overline{A'E'}^2 + \overline{A'F}^2 - 2 \cdot \overline{A'E'} \cdot \overline{A'F} \cdot \cos \angle EAF \Leftrightarrow \\ \overline{E'F}^2 &= x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 150^\circ \Leftrightarrow \\ \overline{E'F}^2 &= x^2(2 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo  $FE'E$ , temos

$$\begin{aligned}\overline{FE}^2 &= \overline{E'F}^2 + \overline{E'E}^2 \Leftrightarrow \overline{FE}^2 = x^2(2 + \sqrt{3}) + (2x)^2 \\ \Leftrightarrow \overline{FE}^2 &= x^2(6 + \sqrt{3}) \\ \Rightarrow \overline{FE} &= x\sqrt{6 + \sqrt{3}}.\end{aligned}$$

**05** | **D**

O número total de faces pintadas das 8 peças é igual a  $4 \cdot 6 = 24$ . Destas,  $2 \cdot 3 = 6$  são cúbicas. Logo, temos  $12 - 6 = 6$  faces cúbicas não pintadas. Ademais,

Cada peça do tipo  $2 \times 2 \times 3$  apresenta uma face  $2 \times 2$  e duas faces  $2 \times 3$  não pintadas. Logo, as faces não pintadas deste tipo totalizam  $3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$  cm<sup>2</sup>.

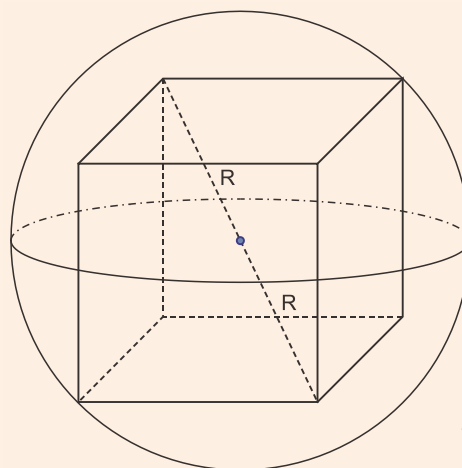
Cada peça do tipo  $3 \times 3 \times 2$  apresenta uma face  $3 \times 3$  e duas faces  $2 \times 3$  não pintadas. Assim, as faces não pintadas deste tipo totalizam  $3 \times 3 \times 3 + 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 63$  cm<sup>2</sup>.

As peças não cúbicas totalizam  $6 \cdot 6 = 36$  faces. Portanto, como foram pintadas  $2 \times 3 \times 3 = 18$  faces destas peças, segue que o número de faces não pintadas é  $36 - 18 = 18$ .

**06** | **C**

Sabendo que  $1\text{m}^3 = 1.000$  L, podemos concluir que a resposta é  $50 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 1000 = 3.750.000$  L.

**07** | **B**





O raio da esfera será a metade da diagonal do cubo:

$$R = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a \cdot \sqrt{3}$$

A probabilidade será dada pela razão entre o volume do cubo e o volume da esfera.

$$P = \frac{(2 \cdot a)^3}{\frac{4}{3} \cdot \delta \cdot R^3} = \frac{8 \cdot a^3}{\frac{4}{3} \cdot \delta \cdot (a\sqrt{3})^3} = \frac{2a^3}{\delta \cdot a^3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\delta \cdot \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot \delta}$$

### 08 | C

Calculando:

$$V_{\text{caixa}} = 7 \cdot 10 \cdot 6 = 420 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{película}} = V_{\text{caixa}}$$

$$\delta \cdot R^2 \cdot 0,2 = 420 \Rightarrow R^2 = \frac{2100}{\delta} \Rightarrow R = 10\sqrt{\frac{21}{\delta}} \text{ cm}$$

### 09 | D

Sejam  $a, b$  e  $c$ , respectivamente, a medida do lado da primeira, a medida do lado da segunda e a altura das caixas d'água. Desse modo, vem  $a^2 \cdot c = 16000$  e  $b^2 \cdot c = 25000$  e, portanto, dividindo ordenadamente essas equações, encontramos

$$\frac{a^2 \cdot c}{b^2 \cdot c} = \frac{16000}{25000} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{16}{25}} \\ \Rightarrow \frac{a}{b} = 0,8.$$

### 10 | C

O sólido ABCDEF é um prisma triangular de bases ABF e DCE. Portanto, a resposta é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AA'} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^3.$$

### 11 | B

Medida da aresta do cubo maior:  $x + 4$

Medida da aresta do cubo menor:  $x$

Como a diferença entre os volumes é de  $208 \text{ cm}^3$ , podemos escrever que:

$$(x + 4)^3 - x^3 = 208$$

$$x^3 + 12x^2 + 48x + 64 - x^3 = 208$$

$$12x^2 + 48x - 144 = 0$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Resolvendo a equação, temos:

$$x = -6 \text{ ou } x = 2.$$

Portanto, a aresta do cubo maior será 6 cm.

Considerando a área lateral da figura igual a área lateral do cubo, temos:

$$A_L = 4 \cdot 6^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

### 12 | B

Seja  $\ell$  a medida da aresta do tetraedro. Desde que as faces do tetraedro são triângulos equiláteros con-

gruentes, vem  $\overline{DM} = \overline{AM} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ . Por conseguinte, aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo AMD, temos

$$\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{DM}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{DM} \cdot \cos \angle \text{AMD} \Leftrightarrow \\ \ell^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \angle \text{AMD} \Leftrightarrow \\ \frac{3\ell^2}{2} \cdot \cos \angle \text{AMD} = \frac{\ell^2}{2} \Leftrightarrow \\ \cos \angle \text{AMD} = \frac{1}{3}.$$

### 13 | B

O volume do tetraedro será a diferença entre o volume do paralelepípedo e os volumes dos quatro tetraedros trirretângulos, como segue:

$$V = V_{\text{Paralelepípedo}} - V_{(\text{EHFA})} - V_{(\text{BAFC})} - V_{(\text{GHFC})} - V_{(\text{DAHC})} \\ V = 4 \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} \\ V = 24 - 16 \\ V = 8$$

### 14 | C

Sendo 1m a medida do apótema da base e  $p$  a medida do apótema da pirâmide, pelo Teorema de Pitágoras, segue que

$$p^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow p = \sqrt{10} \text{ m} \cong 3,16 \text{ m}.$$

Portanto, tem-se que o resultado pedido é dado por

$$4 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 320}{20^2} = 320.$$



**15 | E**

Se o tronco possui 12 vértices, portanto a pirâmide tem base hexagonal regular. Sendo  $\ell$  o lado da base menor (topo) e  $L$  o lado da base maior, pode-se escrever:

$$\begin{cases} 6 \cdot (L + \ell) = 36 \\ 3\sqrt{3}/2 \cdot (L^2 + \ell^2) = 30\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} L + \ell = 6 \\ L^2 + \ell^2 = 20 \end{cases}$$

$$(L + \ell)^2 = 6^2 \rightarrow L^2 + 2 \cdot L \cdot \ell + \ell^2 = 36 \rightarrow 2 \cdot L \cdot \ell = 16 \rightarrow L \cdot \ell = 8$$

$$V = \frac{h}{3} \cdot (B + B' + \sqrt{B \cdot B'}) = \frac{3}{3} \cdot \left( 30\sqrt{3} + \sqrt{6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} \right) = 30\sqrt{3} + \sqrt{3 \cdot 36 \cdot \frac{(L \cdot \ell)^2}{16}}$$

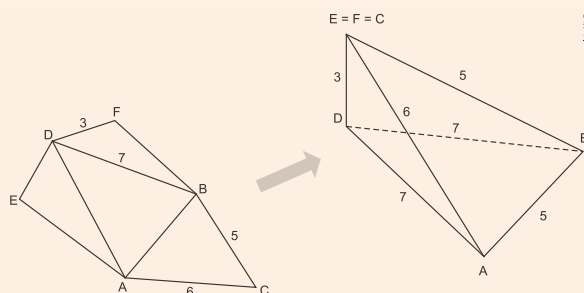
$$V = 30\sqrt{3} + \sqrt{432} \rightarrow V = 42\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

**16 | A**

De acordo com os dados do enunciado, podemos concluir que:

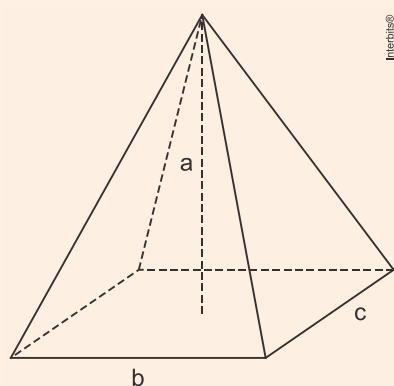
$$DB = DA = 7 \text{ e } BA = BC = 5.$$

Construindo o tetraedro, temos:



Portanto, a soma das arestas será dada por:

$$3 + 5 + 6 + 7 + 7 + 5 = 33.$$

**17 | D**

$$\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 6k \\ b = 4k \\ c = 2k \end{cases}$$

Portanto,

$$6k + 4k + 2k = 36 \Rightarrow k = 3.$$

O volume da pirâmide será dada por:

$$V = \frac{b \cdot c \cdot a}{3} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 18}{3} = 432$$

**18 | D**

O volume pedido é igual a metade do volume do cilindro. Assim, pode-se escrever:

$$V_{\text{metade}} = \frac{\delta \cdot 2^2 \cdot 10}{2} = \frac{40\delta}{2} \rightarrow V = 20\delta$$

**19 | ANULADA**

Questão anulada no gabarito oficial.

Justificativa: A banca equivocou-se ao apresentar nos gráficos o volume como função do tempo e não altura como função do tempo.

**20 | ANULADA**

Questão anulada no gabarito oficial.

Sejam  $r$  e  $h$ , respectivamente, o raio e a altura do cilindro original. Assim, temos

$$\delta \cdot (r + x)^2 \cdot h = \delta \cdot r^2 \cdot (h + x) \Leftrightarrow r^2 h + 2rhx + x^2 h = r^2 h + r^2 x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{r(r - 2h)}{h}.$$

Daí, sabendo que  $x$ ,  $r$  e  $h$  são reais positivos, temos  $r > 2h$ . Porém, nada mais pode se afirmar sobre  $x$ , a não ser que é um número real.

**21 | B**

$R_{\text{setor}} = \text{geratriz}$

$$\ell = \acute{a} \cdot R = \frac{\delta}{4} \cdot 5 = \frac{5\delta}{4}$$

$$2\delta R_{\text{cone}}^2 = \frac{5\delta}{4} \Rightarrow R_{\text{cone}}^2 = \frac{5}{8}$$

$$g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow 5^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{15\sqrt{7}}{8}$$

$$\text{Reduzindo } g \Rightarrow 20\% \cdot g = 20\% \cdot 5 = 0,2 \cdot 5 = 4 \Rightarrow g_{\text{nova}} = 4$$

$$\ell = \frac{\delta}{4} \cdot 4 = \delta$$

$$2\delta R_{\text{cone}}^1 = \delta \Rightarrow R_{\text{cone}}^1 = \frac{1}{2}$$

$$g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow 4^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \frac{25}{64} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{8} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \frac{25 \cdot 5}{64 \cdot 4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

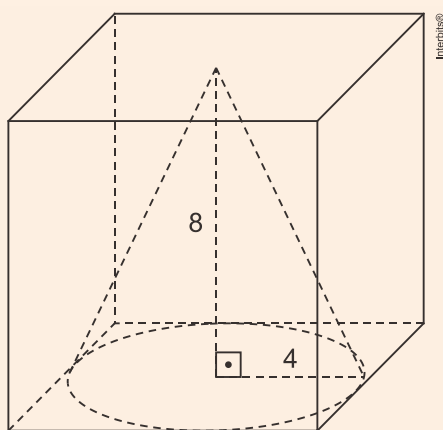
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \delta \cdot \frac{25}{64} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2}} = \frac{1}{25} = \frac{1}{125} = \frac{64}{125} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{64}{125} = 0,512 = 51,2\%$$

$$V_2 = 51,2\% V_1 \Rightarrow \text{redução de } 48,8\%$$

**22| C**

Sejam  $r$  e  $h$ , respectivamente, o raio da base e a altura do cilindro. Logo, sabendo que os dois sólidos possuem o mesmo raio da base e a mesma altura, tem-se que a resposta é dada por

$$\frac{\delta r^2 h}{\frac{1}{3} \delta r^2 h} = 3.$$

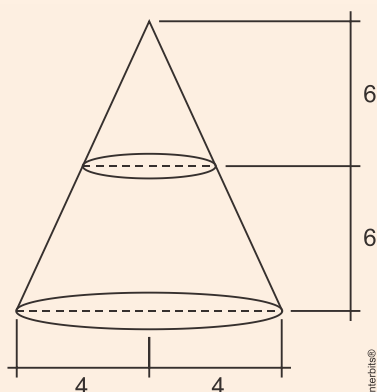
**23| C**

A diferença entre os volumes será dada por:

$$V_{\text{cubo}} - V_{\text{cone}} = 8^3 - \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot 4^2 \cdot 8 = 512 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 128 = 384 \text{ cm}^3$$

**24| C**

De acordo com o enunciado:



Considerando:

$V$  = volume total do cone

$v'$  = volume cheio (tronco)

$v''$  = volume vazio (topo)

$H = 12$  = altura total

$h = 6$  = altura topo / altura tronco

Pode-se calcular:

$$\frac{V}{v''} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{12}{6}\right)^3 = \frac{V}{v''} \rightarrow V = 8v''$$

$$v' + v'' = V \rightarrow v' + \frac{V}{8} = V \rightarrow v' = \frac{7}{8}V$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 12 \rightarrow V = 200,96$$

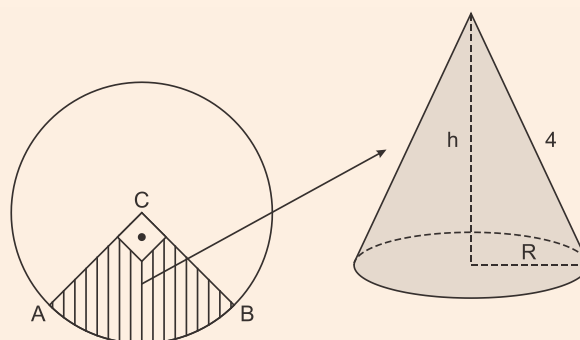
$$v' = \frac{7}{8}V = \frac{7}{8} \cdot 200,96 \rightarrow v' = 175,85 \text{ m}^3$$

$$\text{Tempo} : 500 \text{ L / min} = 0,5 \text{ m}^3 / \text{min}$$

$$1 \text{ min} \text{ — } 0,5 \text{ m}^3$$

$$t \text{ — } 175,85 \text{ m}^3$$

$$t = 351,7 \text{ min} \approx 5 \text{ h e } 50 \text{ min}$$

**25| C**

desenho ilustrativo – fora de escala

Comprimento do arco  $AB$  (circunferência da base do cone de raio  $R$ ).

$$2 \cdot \delta \cdot R = \frac{2 \cdot \delta \cdot 4}{4} \Rightarrow R = 1 \text{ cm}$$

Calculando, agora, a altura do cone, temos:

$$h^2 + 1^2 = 4^2 \Rightarrow h = \sqrt{15} \text{ cm}$$

Logo, o volume do cone será:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \delta \cdot 1^2 \cdot \sqrt{15} = \frac{\sqrt{15} \cdot \delta}{3} \text{ cm}^3$$

**26| C**

O gasto em litros é dado por

$$\frac{4\delta \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2}{3} \approx 36.$$

**27| C**



Como o volume de uma esfera é diretamente proporcional ao cubo de seu raio, segue que o volume da

terça parte da nova esfera corresponde a  $\frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$  vezes o volume da esfera inicial.

### 28 | A

Cada face lateral de cada tronco de pirâmide é um trapézio de base menor 1 e base maior 2. Sendo  $h$  a altura do trapézio, pela análise espacial do tronco e utilizando o Teorema de Pitágoras, pode-se escrever:

$$h^2 = 1^2 + \left(\frac{2-1}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

A área de cada um dos trapézios será:

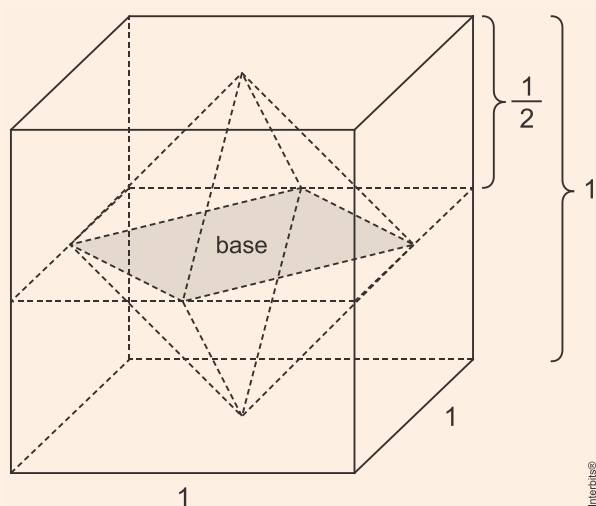
$$S_{\text{facetrápez}} = \frac{(2+1) \cdot \sqrt{5}/2}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

A área lateral de cada tronco de pirâmide será:

$$S_{\ell} = 4 \cdot S_{\text{facetrápez}} = 4 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{4} \rightarrow S_{\ell} = 3\sqrt{5}$$

A área lateral dos dois troncos será igual a  $6\sqrt{5}$  e a área da base maior exposta (topo do monumento) será igual a 4. Assim a área total exposta será igual a  $4 + 6\sqrt{5}$ .

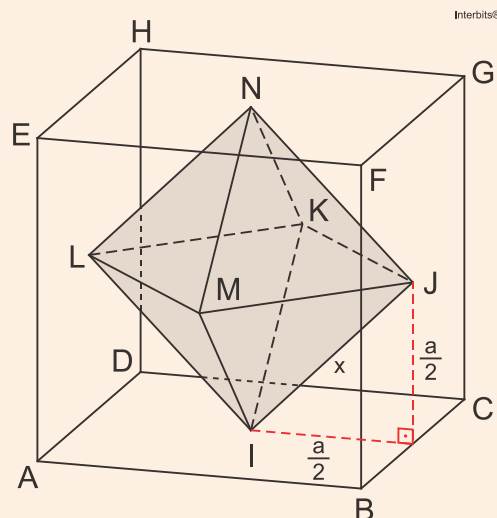
### 29 | C



O poliedro considerado é um octaedro regular, seu volume será a soma dos volumes de duas pirâmides, representadas na figura acima.

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

### 30 | E



Admitindo  $x$  a medida do lado do octaedro da figura podemos escrever que:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{2 \cdot a^2}{4}$$

$$x = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$$

### 31 | C

Sabendo que a medida do diâmetro da esfera é igual à medida da diagonal do cubo, temos

$$2R = 3\sqrt{3} \text{ dm.}$$

### 32 | C

Sabendo que a área lateral de um cilindro equilátero de raio  $r$  é dada por  $4\delta r^2$ , temos

$$4\delta r^2 = 16\delta \Rightarrow r = 2 \text{ cm.}$$

Portanto, sendo o raio da esfera inscrita igual ao raio do cilindro, podemos concluir que o volume da esfera é

$$\frac{4\delta}{3} \cdot r^3 = \frac{4\delta}{3} \cdot 2^3 = \frac{32\delta}{3} \text{ cm}^3.$$

## INEQUAÇÕES

INEQUAÇÕES  
LOGARÍTIMO  
MATRIZ

01| Determine uma matriz invertível  $P$  que satisfaça

a equação  $P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ , sendo  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ .

A  $P = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 9 \\ 2 & -2 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

B  $P = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -15 \end{bmatrix}$

C  $P = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

D  $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{9} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

E  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

02| Sendo  $a$  um número real, considere a matriz

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Então,  $A^{2017}$  é igual a

A  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

B  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

C  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

D  $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

03| Considere a matriz  $M = \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ . Se  $a$  e

$b$  são números reais não nulos e  $\det(M) = 0$ , então o

valor de  $14a^2 - 21b^2$  é igual a

A 15

B 28

C 35

D 49

E 70

04| Uma matriz  $A$  de ordem 2 transmite uma palavra de 4 letras em que cada elemento da matriz representa uma letra do alfabeto.

A fim de dificultar a leitura da palavra, por se tratar de informação secreta, a matriz  $A$  é multiplicada

pela matriz  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$  obtendo-se a matriz codificada  $B \cdot A$ .

Sabendo que a matriz  $B \cdot A$  é igual a  $\begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$ , podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz  $A$  é:

A 46

B 48

C 49

D 47

E 50



**05** | Considere  $A, B, C$  e  $X$  matrizes quadradas de ordem  $n$  e inversíveis. Assinale a alternativa FALSA.

**A**  $(A^{-1})^{-1} = A$

**B**  $(A B C)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

**C**  $A X C = B \Rightarrow X = A^{-1} C^{-1} B$

**D**  $\det(2 A B^{-1}) = 2^n \frac{\det A}{\det B}$

**06** | Uma matriz  $B$  possui  $i$  linhas e  $j$  colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão  $b_{ij} = i - 2j$ . Seja uma matriz  $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$  cujos elementos da primeira coluna são nulos e  $I_2$  a matriz identidade de ordem 2, tal que  $AB = I_2$ .

O valor numérico do maior elemento da matriz  $A$  é igual a

**A** 0

**B** 1

**C** 2

**D** 3

**07** | Se  $L_n 2 \cong 0,6931$ ,  $L_n 3 \cong 1,0986$ , pode-se afirmar

corretamente que  $L_n \frac{\sqrt{12}}{3}$  é igual a

Dados:  $L_n x \equiv$  logaritmo natural de  $x$

**A** 0,4721.

**B** 0,3687.

**C** 0,1438.

**D** 0,2813.

**08** | Uma turma de uma escola central de Porto Alegre recebeu a seguinte questão em sua primeira prova no Ensino Médio:

Um dos valores de  $x$  que soluciona a equação  $\log_2(-x^2 + 32) = 4$  é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é

**A** 3

**B** 4

**C** 5

**D** 6

**E** 7

**09** | Considere as funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 1 + 3^{x-2} \text{ e } g(x) = \log_a x$$

Sabe-se que, na representação gráfica das funções, as curvas interceptam-se no ponto de abscissa 2. Dessa forma, o valor de  $a$  é:

**A**  $-\sqrt{2}$

**B**  $-\frac{1}{2}$

**C** 1

**D**  $\frac{1}{2}$

**E**  $\sqrt{2}$

**10** | Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números reais positivos, tais que  $\log_b a = 5$ ,  $\log_b c = 2$  e  $\log_b d = 3$ . O valor da expressão  $\log_c \frac{a^2 b^5}{d^3}$  é igual a:

**A** 1

**B** 2

**C** 3

**D** 4

**E** 0

**11** | Sejam  $a, b, c, d$  números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I.  $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$ .

II.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$ .

III.  $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

é (são) verdadeira(s)



- A** apenas I.
- B** apenas II.
- C** apenas I e II.
- D** apenas II e III.
- E** todas.

**12** | Suponha que a quantidade  $Q$  de um determinado medicamento no organismo  $t$  horas após sua administração possa ser calculada pela fórmula:

$$Q = 15 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2t}$$

sendo  $Q$  medido em miligramas, a expressão que fornece o tempo  $t$  em função da quantidade de medicamento  $Q$  é:

- A**  $t = \log \sqrt{\frac{15}{Q}}$
- B**  $t = \frac{\log 15}{2 \log Q}$
- C**  $t = 10 \sqrt{\log \left(\frac{Q}{15}\right)}$
- D**  $t = \frac{1}{2} \log \frac{Q}{15}$
- E**  $t = \log \frac{Q^2}{225}$

**13** | A taxa de crescimento populacional de um país é de 2% ao ano. Utilizando os dados da tabela abaixo e considerando que essa taxa permanecerá constante, podemos afirmar que a população desse país dobrará em:

| N    | Log N  |
|------|--------|
| 2,00 | 0,3010 |
| 2,02 | 0,3054 |
| 2,04 | 0,3096 |

- A** 15 anos
- B** 20 anos
- C** 25 anos
- D** 30 anos
- E** 35 anos

**14** | Se  $\log_5 x = 2$  e  $\log_{10} y = 4$ , então  $\log_{20} \frac{y}{x}$  é

- A** 2.
- B** 4.
- C** 6.
- D** 8.
- E** 10.

**15** | O número  $N$  de bactérias de uma cultura é dado em função do tempo  $t$  (em minutos), pela fórmula  $N(t) = (2,5)^{12t}$ . Considere  $\log_{10} 2 = 0,3$ , o tempo (em minutos) necessário para que a cultura tenha  $10^{84}$  bactérias é

- A** 120
- B** 150
- C** 175
- D** 185
- E** 205

**16** | Estima-se que, daqui a  $t$  semanas, o número de pessoas de uma cidade que ficam conhecendo um

novo produto seja dado por  $N = \frac{20.000}{1 + 19(0,5)^t}$ .

Daqui a quantas semanas o número de pessoas que ficam conhecendo o produto quintuplica em relação ao número dos que o conhecem hoje?

- A**  $\frac{\log 19 - \log 7}{1 - \log 5}$
- B**  $\frac{\log 19 - \log 6}{1 - \log 5}$
- C**  $\frac{\log 19 - \log 5}{1 - \log 5}$
- D**  $\frac{\log 19 - \log 4}{1 - \log 5}$
- E**  $\frac{\log 19 - \log 3}{1 - \log 5}$



**17** | No instante  $t = 0$ , quando a quantidade presente de determinada substância radioativa começa a ser monitorada, registra-se  $Q_0$  gramas da substância. Depois de  $t$  horas, a partir  $t = 0$ , a quantidade, em gramas, de substância remanescente é calculada através da equação  $Q(t) = Q_0 e^{-0,45t}$ .

Considerando-se  $\log_e 2 = 0,69$ , pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade presente dessa substância seja reduzida a metade da quantidade inicial é de

- A** 54 min
- B** 1 h 20 min
- C** 1 h 32 min
- D** 1 h 45 min
- E** 2 h 9 min

**18** | Para todos os inteiros  $n$  de 1 a 2016, temos que:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } \log n \text{ for um número inteiro;} \\ (-1)^n, & \text{se } \log n \text{ não for um número inteiro.} \end{cases}$$

Sendo assim, a soma  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2015} + a_{2016}$  é igual a

- A** 8.
- B** 7.
- C** 6.
- D** -6.
- E** -8.

**19** | Uma calculadora tem duas teclas especiais, A e B. Quando a tecla A é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla B é digitada, o número do visor é multiplicado por 5.

Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10.

Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

- A** 20
- B** 30
- C** 40
- D** 50

**20** | Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada. A quantidade de medicamentos, em miligramas, presente no organismo de um paciente é calculada pela

função  $Q(t) = 30 \cdot 2^{1 - \frac{t}{10}}$ , onde  $t$  é o tempo dado em horas.

O tempo necessário para que a quantidade de medicamento em um paciente se reduza a 40% da quantidade inicial, é:

Dado:  $\log 2 = 0,3$

- A** 13 horas e 33 minutos.
- B** 6 horas e 06 minutos.
- C** 13 horas e 20 minutos.
- D** 6 horas e 40 minutos.

**21** | Se  $\log 2 \cong 0,3$  e  $\log 36 \cong 1,6$ , então  $\log 3 \cong$  \_\_\_\_\_.

- A** 0,4
- B** 0,5
- C** 0,6
- D** 0,7

**22** | No universo dos números reais, a equação  $\frac{(x^2 - 13x + 40)(x^2 - 13x + 42)}{\sqrt{x^2 - 12x + 35}} = 0$  é satisfeita por apenas

- A** três números.
- B** dois números.
- C** um número.
- D** quatro números.
- E** cinco números.





**23** | O sistema de inequações abaixo admite  $k$  soluções inteiras.

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

Pode-se afirmar que:

- A**  $0 \leq k < 2$
- B**  $2 \leq k < 4$
- C**  $4 \leq k < 6$
- D**  $6 \leq k < 8$
- E**  $k \geq 8$

**24** | O número de soluções inteiras da inequação

$$0 \leq x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 2 \text{ é}$$

- A** 1.
- B** 2.
- C** 3.
- D** 4.
- E** 5.

**25** | A desigualdade  $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$  tem como conjunto solução

- A**  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
- B**  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
- C**  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
- D**  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.

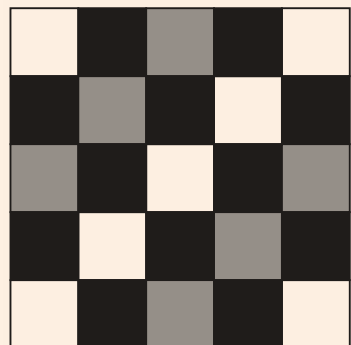
Uma tela de computador pode ser representada por uma matriz de cores, de forma que cada elemento da matriz corresponda a um <sup>1</sup>pixel na tela.

Numa tela em escala de cinza, por exemplo, podemos atribuir 256 cores diferentes para cada pixel, do preto absoluto (código da cor: 0) passando pelo cinza in-

termediário (código da cor: 127) ao branco absoluto (código da cor: 255).

<sup>1</sup>Menor elemento em uma tela ao qual é possível atribuir-se uma cor.

Suponha que na figura estejam representados 25 pixels de uma tela.



A matriz numérica correspondente às cores da figura apresentada é dada por

$$\begin{bmatrix} 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \\ 0 & 127 & 0 & 255 & 0 \\ 127 & 0 & 255 & 0 & 127 \\ 0 & 255 & 0 & 127 & 0 \\ 255 & 0 & 127 & 0 & 255 \end{bmatrix}$$

26. (Fatec 2017) Uma matriz  $M = (a_{ij})$ , quadrada de ordem 5, em que  $i$  representa o número da linha e  $j$  representa o número da coluna, é definida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 127, & \text{se } i > j \\ 255, & \text{se } i < j \end{cases}$$

A matriz  $M$  corresponde a uma matriz de cores em escala de cinza, descrita pelo texto, em uma tela.

Sobre essa matriz de cores, pode-se afirmar que ela

- A** terá o mesmo número de pixels brancos e cinzas.
- B** terá o mesmo número de pixels brancos e pretos.
- C** terá o mesmo número de pixels pretos e cinzas.
- D** terá uma diagonal com cinco pixels brancos.
- E** terá uma diagonal com cinco pixels cinzas.

**GABARITO****01| E**

Admitindo que a matriz  $P$  seja dada por  $P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$  e que:

$$P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow P \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = A \Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Temos então a equação matricial.

$$\begin{bmatrix} 5x & -2y \\ 5z & -2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{5}, y = 1, z = \frac{3}{5} \text{ e } w = -\frac{3}{2}$$

Portanto a matriz  $P$  será dada por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

**02| B**

Calculando:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

$$A^6 = A^4 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

$\vdots$

$$A^{2016} = A^{2014} \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

$$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = I \cdot A = A \rightarrow A^{2017} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**03| C**

$$\det M = \begin{vmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & a \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3a^4 + 5ab - 2a^3b - 3a^4 + 3ab^3 =$$

$$= ab \cdot (5 - 2a^2 + 3b^2) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ ou } 5 - 2a^2 + 3b^2 = 0$$

Como  $a$  e  $b$  são nulos, devemos considerar que:

$$5 - 2a^2 + 3b^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3b^2 = 5$$

Portanto,

$$14a^2 - 21b^2 = 7 \cdot (2a^2 - 3b^2) = 7 \cdot 5 = 35$$

**04| D**

Calculando:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a - c & 3b - d \\ -5a + 2c & -5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a - c \\ -5a + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b - d \\ -5b + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 15 \\ d = 18 \end{cases}$$

$$a + b + c + d = 1 + 13 + 15 + 18 = 47$$

**05| C**

Analisando as alternativas, percebe-se que a única incorreta é a alternativa [C], pois:

$$\begin{cases} A \cdot X \cdot C = B \\ A^{-1} \cdot A = I \\ B^{-1} \cdot B = I \\ C^{-1} \cdot C = I \\ X^{-1} \cdot X = I \end{cases}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B \rightarrow X \cdot C = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B \rightarrow X \cdot C = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$$

**06| B**

Se  $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$  e  $AB = I_2$ , então  $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ . Ade-

mais, sendo  $b_{ij} = i - 2j$ , vem  $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Em consequência, temos

$$A \cdot B = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & -2a - b \\ d & -2c - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = -\frac{1}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Portanto, como  $b = 1$  é o maior elemento da matriz  $A$ , segue o resultado.

**07 | C**

Tem-se que

$$\begin{aligned}
 L_n \frac{\sqrt{12}}{3} &= L_n \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3} \\
 &= L_n \frac{2}{3^{\frac{1}{2}}} \\
 &= L_n 2 - \frac{1}{2} \cdot L_n 3 \\
 &\cong 0,6931 - \frac{1}{2} \cdot 1,0986 \\
 &\cong 0,1438.
 \end{aligned}$$

**08 | B**Desde que  $x$  é um número inteiro positivo, temos:

$$\begin{aligned}
 \log_2(-x^2 + 32) &= 4 \Leftrightarrow -x^2 + 32 = 16 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 16. \\
 &\Rightarrow x = 4.
 \end{aligned}$$

**09 | E**

Calculando:

$$\begin{aligned}
 f(2) &= g(2) \\
 1 + 3^{2-2} &= \log_a 2 \Rightarrow 1 + 3^0 = \log_a 2 \Rightarrow \log_a 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**10 | C**

Calculando:

$$\begin{aligned}
 \log_c \frac{a^2 b^5}{d^3} &= \log_c a^2 b^5 - \log_c d^3 = (\log_c a^2 + \log_c b^5) - \log_c d^3 = \\
 &= (2 \log_c a + 5 \log_c b) - 3 \log_c d = \left( 2 \cdot \frac{\log_b a}{\log_b c} + 5 \cdot \frac{\log_b b}{\log_b c} \right) - 3 \cdot \frac{\log_b d}{\log_b c} = \\
 &= \left( 2 \cdot \frac{5}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} \right) - 3 \cdot \frac{3}{2} = \left( 5 + \frac{5}{2} \right) - \frac{9}{2} = \frac{15}{2} - \frac{9}{2} = \frac{6}{2} = 3
 \end{aligned}$$

**11 | C**

Analisando as afirmativas:

[I] Verdadeira. Calculando:

$$\left. \begin{aligned}
 a^{(\log_c b)} &= x \\
 \log_b a^{\log_c b} &= \log_b x \\
 \log_b a^{\log_c b} &= \log_c b \cdot \log_b a \\
 \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b} \rightarrow \log_c b \cdot \log_b a = \log_c a
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \log_b x = \log_c a \rightarrow x = b^{\log_c a}$$

[III] Verdadeiro. Utilizando a relação obtida na alternativa anterior, pode-se escrever:

$$\left( \frac{a}{b} \right)^{\log_d c} \left( \frac{b}{c} \right)^{\log_d a} \left( \frac{c}{a} \right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}} \cdot \frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}} = \frac{c^{\log_d a}}{b^{\log_d c}} \cdot \frac{a^{\log_d b}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{b^{\log_d c}}{a^{\log_d b}} = 1$$

[III] Falsa. A igualdade só se verifica se o valor de  $a$  for igual ao valor de  $c$ , e  $b \neq 1$ . No caso de números distintos, a igualdade não se verifica, pois:

$$\begin{aligned}
 \log_{ab}(bc) &= \log_a c \\
 \frac{\log_a bc}{\log_a ab} &= \log_a c \rightarrow \log_a bc = \log_a c \cdot \log_a ab \rightarrow \log_a b + \log_a c = \log_a c \cdot (\log_a a + \log_a b) \\
 \log_a b + \log_a c &= \log_a c \cdot (1 + \log_a b) \rightarrow \log_a b + \log_a c = \log_a c + \log_a b \cdot \log_a c \\
 \log_a b &= \log_a b \cdot \log_a c \rightarrow \log_a c = 1 \rightarrow a = c
 \end{aligned}$$

**12 | A**Lembrando que  $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ , com  $1 \neq a > 0$  e  $b > 0$ , temos

$$\begin{aligned}
 Q &= 15 \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^{2t} \Leftrightarrow 10^{-2t} = \frac{Q}{15} \\
 &\Leftrightarrow \log 10^{-2t} = \log \frac{Q}{15} \\
 &\Leftrightarrow -2t = \log \frac{Q}{15} \\
 &\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \cdot \log \frac{Q}{15} \\
 &\Leftrightarrow t = \log \sqrt{\frac{15}{Q}}.
 \end{aligned}$$

**13 | E**Seja a função  $p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , dada por  $p(t) = p_0 \cdot (1,02)^t$ , com  $p(t)$  sendo a população do país após  $t$  anos. Logo, como queremos calcular  $t$  para o qual se tem  $p(t) = 2 \cdot p_0$ , vem

$$\begin{aligned}
 2 \cdot p_0 &= p_0 \cdot (1,02)^t \Leftrightarrow \log(1,02)^t = \log 2 \\
 &\Leftrightarrow t \cdot \log(1,02) = \log 2 \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,02} \\
 &\Rightarrow t \cong \frac{0,301}{0,0086} \\
 &\Leftrightarrow t = 35.
 \end{aligned}$$

**14 | A**

$$\log_5 x = 2 \Rightarrow x = 5^2 \Rightarrow x = 25$$

$$\log_{10} y = 4 \Rightarrow y = 10^4 \Rightarrow y = 10000$$

$$\log_{20} \frac{y}{x} = \log_{20} \frac{10000}{25} = \log_{20} 400 = 2$$

**15 | C**

$$N(t) = (2,5)^{1,2t}$$

$$10^{84} = (2,5)^{1,2t}$$

$$\log 10^{84} = \log(2,5)^{1,2t}$$

$$84 \log 10 = 1,2 \cdot t \cdot \log\left(\frac{10}{4}\right)$$

$$84 = 1,2t \cdot (\log 10 - \log 4)$$

$$70 = t \cdot (1 - 2 \cdot \log 2)$$

$$70 = t \cdot (1 - 2 \cdot 0,3)$$

$$t = \frac{70}{0,4}$$

$$t = 175 \text{ minutos}$$

**16 | E**

Calculando:

$$N_0 = \frac{20.000}{1 + 19 \cdot (0,5)^0} \Rightarrow N_0 = 1000$$

$$N_t = \frac{20.000}{1 + 19 \cdot (0,5)^t} = 5 \cdot 1000 \Rightarrow \frac{4}{1 + 19 \cdot (0,5)^t} = 1 \Rightarrow (0,5)^t = \frac{3}{19}$$

$$t = \log_{0,5}\left(\frac{3}{19}\right) = \frac{\log_{10}\left(\frac{3}{19}\right)}{\log_{10}\left(\frac{5}{10}\right)} = \frac{\log 3 - \log 19}{(\log 5) - 1} \Rightarrow t = \frac{\log 19 - \log 3}{1 - \log 5}$$

**17 | C**

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0,45t}$$

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 \cdot e^{-0,45t}$$

$$2^{-1} = e^{-0,45t}$$

$$\log_e 2^{-1} = \log_e e^{-0,45t}$$

$$-1 \cdot \log_e 2 = -0,45 \cdot t$$

$$-0,69 = -0,45t$$

$$t = (1,5333...) \text{ horas} = 1 \text{ hora e } 32 \text{ minutos.}$$

**18 | C**

É fácil ver que  $\log n$  será um número inteiro quando  $n$  for uma potência de 10. Portanto, segue que  $a_1 = a_{10} = a_{100} = a_{1000} = 2$ .

Considere a sequência cujo termo geral é  $b_n = (-1)^n$ , para todo  $n$  natural de 1 a 2016. Logo, é imediato que  $\sum_{n=1}^{2016} b_n = 0$ . Ademais, subtraindo-se os termos  $b_1 = -1, b_{10} = 1, b_{100} = 1$  e  $b_{1000} = 1$ , vem

$$\sum_{n=1}^{2016} b_n - (b_1 + b_{10} + b_{100} + b_{1000}) = 0 - 2 = -2.$$

Por conseguinte, tem-se que a resposta é

$$\sum_{n=1}^{2016} a_n = -2 + a_1 + a_{10} + a_{100} + a_{1000} = 6.$$

**19 | A**Número inicial no visor =  $x$ Tecla B =  $5x$ Tecla A =  $\log_{10}(5x)$ 

$$\text{Tecla B} = 5 \cdot (\log_{10}(5x)) = 10 \rightarrow \log_{10}(5x) = 2 \rightarrow 5x = 10^2 \rightarrow x = \frac{100}{5} = 20$$

**20 | C**

$$t = 0 \Rightarrow Q(t) = 100\% \Rightarrow Q(0) = 30 \cdot 2^{\frac{0}{10}} = 30 \cdot 2^0 = 30$$

$$40\% \cdot 60 = 0,4 \cdot 60 = 24$$

$$24 = 30 \cdot 2^{\frac{t}{10}} \Rightarrow \frac{24}{30} = 2^{\frac{t}{10}} \Rightarrow 0,8 = 2^{\frac{t}{10}} \Rightarrow \log_2 0,8 = \log_2 2^{\frac{t}{10}} \rightarrow \log_2 0,8 = 1 - \frac{t}{10}$$

Mas,

$$\log_2 0,8 = \frac{\log_{10} 0,8}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} \frac{8}{10}}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 8 - \log_{10} 10}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 2^3 - \log_{10} 10}{\log_{10} 2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \log_{10} 2 - 1}{\log_{10} 2} = \frac{3 \cdot 0,3 - 1}{0,3} = \frac{-0,1}{0,3} = -\frac{1}{3}$$

Assim,

$$-\frac{1}{3} = 1 - \frac{t}{10} \Rightarrow -10 = 30 - 3t \Rightarrow 3t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{3} \text{ horas} = 800 \text{ min} = 13\text{h}20\text{min}$$

**21 | B**

Tem-se que

$$\log 36 = \log(2 \cdot 3)^2$$

$$= 2 \cdot (\log 2 + \log 3)$$

$$\cong 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot \log 3$$

$$\cong 0,6 + 2 \cdot \log 3.$$

Portanto, o resultado é

$$0,6 + 2 \cdot \log 3 \cong 1,6 \Rightarrow \log 3 \cong 0,5.$$

**22 | C**O conjunto de valores de  $x$  para os quais a equação possui raízes reais é tal que

$$x^2 - 12x + 35 > 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 7) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 5 \text{ ou } x > 7.$$

Desse modo, temos



$$\frac{(x^2 - 13x + 40)(x^2 - 13x + 42)}{\sqrt{x^2 - 12x + 35}} = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 6)(x - 7)(x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 8.$$

Portanto, a equação é satisfeita por apenas um número real.

**23 | D**

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 14}{x} > 3 \\ x \leq 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x - 14}{x} < 0 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

Resolvendo e fazendo os diagramas de sinais, temos:

$$\begin{cases} x > 7 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} 7 < x \leq 12 \\ -2 < x < 0 \end{cases} \text{ Inteiros} \rightarrow S = \{-1, 8, 9, 10, 11, 12\} \rightarrow k = 6$$

**24 | C**

$$1) x^2 - |3x^2 + 8x| \leq 0 \rightarrow x = 0 \text{ é solução}$$

$$2) |3x^2 + 8x| \cdot |x| \leq |x| \cdot |x| \rightarrow 9x^2 + 48x + 64 \leq x^2 \rightarrow x^2 + 6x + 8 \leq 0$$

$$\text{soluções} \rightarrow -4 \leq x \leq -2$$

$$\text{soluções inteiras possíveis: } -2, -3, -4$$

Porém, substituindo-se o valor  $-3$  na inequação original os valores não conferem. Logo, as soluções possíveis serão apenas  $0, -2$  e  $-4$ .

**25 | B**

Sendo  $0 < \frac{1}{2} < 1$ , temos

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{4}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 < 2x$$

$$\Leftrightarrow x < 5.$$

Por conseguinte, o conjunto solução da inequação é

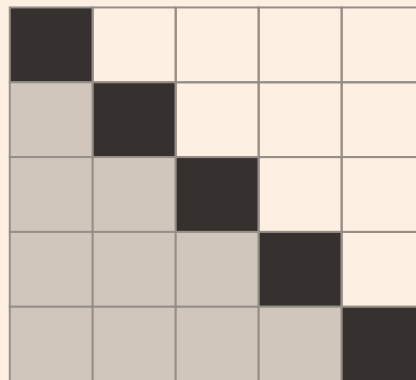
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}.$$

**26 | A**

A matriz  $M$  será da seguinte forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 255 & 255 & 255 & 255 \\ 127 & 0 & 255 & 255 & 255 \\ 127 & 127 & 0 & 255 & 255 \\ 127 & 127 & 127 & 0 & 255 \\ 127 & 127 & 127 & 127 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando as cores correspondentes, temos:



Portanto, a afirmação correta é: "Terá o mesmo número de *pixels* brancos e cinzas".

## MÉDIA

**01** Um aluno realizou cinco provas em uma disciplina, obtendo as notas: 10, 8, 6, x e 7.

Sabe-se que a média aritmética simples destas notas é 8. Assinale qual a nota da prova representada por x.

- A** 6.
- B** 7.
- C** 8.
- D** 9.
- E** 10.

**02** O professor de matemática decidiu bonificar com um ponto na prova aqueles alunos que acertassem mais questões que a média de acertos dos alunos da turma em um exercício aplicado em sala. O exercício com 10 questões foi aplicado entre os 20 alunos da turma e o número de acertos foi o mostrado na tabela a seguir.

| Número de acertos | Número de alunos |
|-------------------|------------------|
| 0                 | 2                |
| 1                 | 4                |
| 4                 | 3                |
| 5                 | 2                |
| 6                 | 0                |
| 7                 | 4                |
| 8                 | 4                |
| 9                 | 1                |

Baseando-se na tabela, quantos alunos serão bonificados?

- A** 14
- B** 11
- C** 9
- D** 5
- E** 1

**03** Uma empresa foi fazer uma pesquisa para comprar uma câmara fria CMC4. Quatro preços foram levantados: R\$ 26.000,00, R\$ 25.000,00, R\$ 24.000,00 e R\$ 21.000,00. A média aritmética desses quatro preços encontrados na pesquisa é

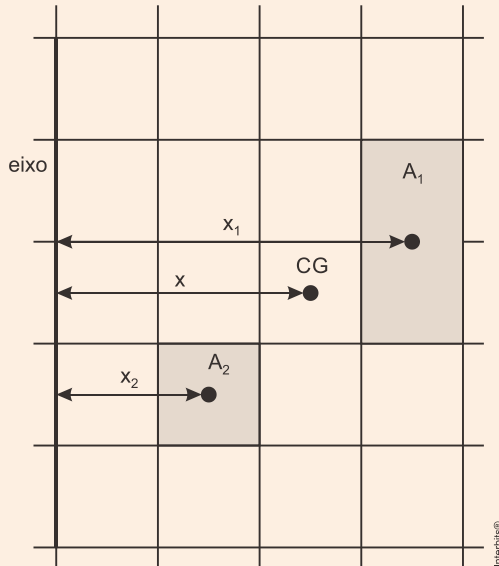
- A** R\$ 22.000,00.
- B** R\$ 24.000,00.
- C** R\$ 26.000,00.
- D** R\$ 25.500,00.
- E** R\$ 24.500,00.

**04** Em uma escola, a Turma B composta por 20 alunos, teve a média de 7,6 na disciplina Matemática, já a Turma D teve a média de 7,5. Se fosse retirada a nota do aluno Prudêncio, que é da turma B, a média da sua turma seria idêntica à média da Turma D. Com base nestas informações, pode-se afirmar que a nota do aluno Prudêncio foi o valor X compreendido no intervalo:

- A**  $5 \leq X < 6$
- B**  $6 \leq X < 7$
- C**  $9 \leq X < 10$
- D**  $7 \leq X < 8$
- E**  $8 \leq X < 9$



**05** Dadas, num plano, duas figuras de áreas  $A_1$  e  $A_2$  cujas distâncias de seus centros de gravidade a um eixo desse plano são  $x_1$  e  $x_2$ , a distância  $x$  (do centro de gravidade CG desse conjunto ao mesmo eixo) é a média ponderada entre  $x_1$  e  $x_2$ , com pesos  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente. Considerando-se que cada quadrícula da malha mostrada abaixo tem lado medindo 1, a distância  $x$  será igual a:



- A**  $\frac{8}{3}$
- B**  $\frac{9}{4}$
- C**  $\frac{13}{5}$
- D**  $\frac{17}{6}$
- E**  $\frac{11}{4}$

**06** Um artesão fabrica certo tipo de peças a um custo de R\$ 10,00 cada e as vende no mercado de artesanato com preço variável que depende da negociação com o freguês. Num certo dia, ele vendeu 2 peças por R\$ 25,00 cada, 4 peças por R\$ 22,50 cada e mais 4 peças por R\$ 20,00 cada.

O lucro médio do artesão nesse dia foi de

- A** R\$ 22,50
- B** R\$ 22,00
- C** R\$ 19,20
- D** R\$ 12,50
- E** R\$ 12,00

**07** Cinco amigos, Ayrton, Emerson, Felipe, Nelson e Rubens, disputaram uma corrida de kart, com somente cinco participantes. Após uma sessão para a “tomada de tempos”, eles largaram na ordem estabelecida por essa sessão. Ao final da corrida e em relação às respectivas posições de largada, Ayrton melhorou uma posição, Emerson piorou duas posições, Felipe e Nelson trocaram de posição. Rubens ganhou a corrida.

Na largada, Rubens ocupava a posição de número:

- A** 2
- B** 1
- C** 3
- D** 4
- E** 5

**08** No mundo da gastronomia muitas vezes é necessário ampliar ou reduzir receitas devido a alterações no número de participantes de determinada refeição. Uma receita propõe a utilização de 280 mL de leite na execução de uma sobremesa para 5 pessoas, e há a necessidade de executá-la exatamente para 54 pessoas. Se as embalagens de leite contêm 500 mL cada, então, é necessário ter em mãos pelo menos

- A** 2,5 L de leite.
- B** 3,5 L de leite.
- C** 5,0 L de leite.
- D** 4,0 L de leite.
- E** 3,0 L de leite.

**09** Um comerciante, para aumentar as vendas de seu estabelecimento, fez a seguinte promoção para determinado produto:

COMPRE 4 UNIDADES E LEVE 5

Essa promoção representa um desconto de  $x\%$  na venda de 5 unidades.

O valor de  $x$  é igual a:

- A** 10
- B** 15
- C** 20
- D** 25





**10|** Considere as instruções a seguir, dadas a um computador:

1. Inicialize o valor de  $X$  com 4 e o valor de  $Y$  com 0 (zero);
2. Some 7 ao valor de  $X$ ;
3. Some  $X$  ao valor de  $Y$ ;
4. Se o valor de  $Y$  for no mínimo 100, vá para a instrução 5; caso contrário, vá para a instrução 2 e prossiga a partir de lá;
5. Imprima o valor de  $X$ ;
6. Pare.

O valor de  $X$  que será impresso na instrução 5 é:

- A** 101
- B** 54
- C** 29
- D** 25
- E** 39

**11|** Um automóvel trafega 240 km por dia e apresenta um desempenho de 12 km/L, quando utiliza exclusivamente gasolina, ou de 15 km/m<sup>3</sup>, quando utiliza, exclusivamente, GNV (gás natural veicular).

Assumindo que o preço da gasolina é de R\$ 3,50 por litro, que o preço do GNV é de R\$ 2,00 por m<sup>3</sup> e desconsiderando quaisquer outros fatores, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a quantidade mínima de dias suficiente para que seja possível comprar um celular de R\$ 3.819,00 com a economia gerada pelo uso exclusivo do GNV.

- A** 11
- B** 12
- C** 100
- D** 101
- E** 102

**12|** Sabe-se que, se  $x^2 = 4$ , então  $y^2 - 3y = 0$ . Podemos afirmar que:

- A** Se  $x = 2$ , então  $y = 0$
- B** Se  $x = -2$ , então  $y = 3$
- C** Se  $y = 2$ , então  $x \neq 2$  e  $x \neq -2$
- D** Se  $y = 2$ , então  $x \neq 2$  ou  $x \neq -2$
- E** Se  $y = 3$ , então  $x = 2$  ou  $x = -2$

**13|** O tempo de um dia é medido em um período chamado hora e em número de 24 horas. Esse mesmo tempo poderia ser subdividido em 54 períodos iguais, chamados de TAS. Assim, um dia teria 54 TAS. Nesta hipótese, considere subdivisões decimais da unidade de medida TAS. Decorridas 7 horas e 40 minutos de um evento, esse mesmo tempo, medido em TAS, é igual a

- A** 13,5.
- B** 21,25.
- C** 17,25.
- D** 15,1.
- E** 19,75.

**14|** Quanto ao estado civil das funcionárias de um escritório, é verdade que:

- Ou Laura não é casada ou Maria é casada.
- Se Maria é casada, então Paula é divorciada.
- Se Paula não é divorciada, então Laura é casada.

Com base no exposto, pode-se afirmar que:

- A** Laura é casada.
- B** Maria é solteira.
- C** Paula é casada.
- D** Laura é solteira.
- E** Paula é divorciada.

**15|** Considere que:

- a sentença “Nenhum  $A$  é  $B$ ” é equivalente a “Todo  $A$  é não  $B$ ”;
- a negação da sentença “Todo  $A$  é  $B$ ” é “Algum  $A$  é não  $B$ ”;
- a negação da sentença “Algum  $A$  é  $B$ ” é “Todo  $A$  é não  $B$ ”.

Assim sendo, a negação da sentença “Nenhum nefelibata é pragmático” é

- A** Todo nefelibata é não pragmático.
- B** Todo não nefelibata é pragmático.
- C** Algum nefelibata é pragmático.
- D** Algum não nefelibata é pragmático.
- E** Algum não nefelibata é não pragmático.



**16|** Assinale a alternativa verdadeira:

**A**  $\sqrt{2.016} - \sqrt{2.015} < \sqrt{2.017} - \sqrt{2.016} < (2\sqrt{2.016})^{-1}$

**B**  $\sqrt{2.017} - \sqrt{2.016} < \sqrt{2.016} - \sqrt{2.015} < (2\sqrt{2.016})^{-1}$

**C**  $\sqrt{2.017} - \sqrt{2.016} < (2\sqrt{2.016})^{-1} < \sqrt{2.016} - \sqrt{2.015}$

**D**  $\sqrt{2.016} - \sqrt{2.015} < (2\sqrt{2.016})^{-1} < \sqrt{2.017} - \sqrt{2.016}$

**E**  $(2\sqrt{2.016})^{-1} < \sqrt{2.017} - \sqrt{2.016} < \sqrt{2.016} - \sqrt{2.015}$

**17|** Aníbal, Cláudio, Daniel, Rafael e Renato são interrogados na investigação do roubo de uma joia. Sabe-se que apenas um deles cometeu o roubo. No interrogatório, as seguintes falas foram registradas:

Renato: “Aníbal roubou a joia”.

Aníbal: “Cláudio não roubou a joia”.

Rafael: “Daniel roubou a joia”.

Daniel: “Aníbal não roubou a joia”.

Cláudio: “Renato roubou a joia”.

Se apenas três dos cinco disseram a verdade em sua fala e se quem roubou a joia mentiu na sua fala, então, quem roubou a joia foi

**A** Aníbal.

**B** Cláudio.

**C** Daniel.

**D** Rafael.

**E** Renato.

**18|** A função  $f$  que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor  $x$  de um produto é

**A**  $f(x) = x - 21$

**B**  $f(x) = 0,79x$

**C**  $f(x) = 1,21x$

**D**  $f(x) = -21x$

**E**  $f(x) = 1,021x$

## GABARITO

**01| D**

Sendo uma média aritmética, para se obter a nota que resta, deve-se somar todas as notas das provas, dividir pelo total de provas e igualar à média. Sendo assim, temos que:

$$\frac{10 + 8 + 6 + x + 7}{5} = 8$$

$$\frac{31 + x}{5} = 8$$

$$31 + x = 40$$

$$x = 40 - 31$$

$$x = 9$$

Logo, a nota restante é 9.

**02| B**

Para se obter a média de acertos deve-se multiplicar cada acerto pelo número correspondente de alunos e dividir por vinte (total de alunos):

$$\text{média} = \frac{(0 \times 2) + (1 \times 4) + (4 \times 3) + (5 \times 2) + (6 \times 0) + (7 \times 4) + (8 \times 4) + (9 \times 1)}{20} = 4,75$$

Somando o número de alunos com média de acerto acima de 4,75 presentes na tabela temos:

$$2 + 0 + 4 + 4 + 1 = 11.$$

**03| B**

Sabendo que a média é dada pela soma de todos os valores dividido pelo total de valores somados, temos:

$$\text{Média} = \frac{26000 + 25000 + 21000}{3} = 24.000$$

**04| C**

Sabendo que a média das notas da turma é dada pela soma de todas as notas individuais e dividida pelo número total de alunos, pode-se afirmar que:

Seja  $N$  a soma total das notas, temos que:

$$\frac{N}{20} = 7,6 \Rightarrow N = 152$$

Logo, para obter a nota  $X$ , basta subtraí-la de  $N = 152$ , dividir por 19, já que estamos subtraindo um aluno e igualar a 7,5, já que, se retirar a nota do aluno Prudêncio, que é da turma B, a média da sua turma seria idêntica à média da Turma D.

$$\frac{152 - X}{19} = 7,5 \Rightarrow x = 9,5$$

**05 | D**

Sendo  $A_1 = 2$  e  $A_2 = 1$ , temos

$$x = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{3,5 \cdot 2 + 15 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{8,5}{3} = \frac{17}{6}$$

**06 | E**

O lucro médio do artesão é dado por

$$\frac{2 \cdot 15 + 4 \cdot 12,50 + 4 \cdot 10}{2 + 4 + 4} = \text{R\$ } 12,00.$$

**07 | A**

As opções de posicionamento de acordo com as informações das posições de Ayrton, Emerson e Rubens são:

| Larga-da | Final   | Largada | Final   | Larga-da | Final   |
|----------|---------|---------|---------|----------|---------|
| Emerson  | Rubens  | A       | Rubens  | Emerson  | Rubens  |
| B        | Ayrton  | Emerson |         | B        |         |
| Ayrton   | Emerson | C       | Ayrton  | C        | Emerson |
| C        |         | Ayrton  | Emerson | D        | Ayrton  |
| D        |         | E       |         | Ayrton   |         |
|          |         |         |         |          |         |
| Larga-da | Final   | Largada | Final   | Larga-da | Final   |
| A        | Rubens  | A       | Rubens  | A        | Rubens  |
| Emerson  | Ayrton  | B       |         | B        |         |
| Ayrton   |         | Emerson | Ayrton  | Emerson  |         |
| D        | Emerson | Ayrton  |         | D        | Ayrton  |
| E        |         | E       | Emerson | Ayrton   | Emerson |

Como Felipe e Nelson trocaram de posição, suas respectivas posições não devem permutar com o posicionamento dos outros três participantes. Assim, a única opção válida de posicionamento será:

| Largada | Final   |
|---------|---------|
| Emerson | Rubens  |
| Rubens  | Ayrton  |
| Ayrton  | Emerson |
| C       | D       |
| D       | C       |

Onde Felipe e Nelson ocupam as posições C e D (não há como precisar qual ocupa qual, apenas que elas se invertem na chegada).

**08 | B**

280 mL — 5 pessoas

x — 54 pessoas

$$x = 3024 \text{ mL} = 3,024 \text{ L}$$

Se as embalagens vêm em múltiplos de 0,5 L (500 mL), então será necessário ter em mãos, para não faltar leite, 7 caixas ou 3,5 L.

**09 | C**

Considerando um valor qualquer para o produto, por exemplo R\$100,00, o custo de 4 unidades seria R\$400,00 e o de 5 unidades seria R\$500,00. Com a promoção o valor de 5 unidades passa a ser de R\$400,00, ou seja, houve um desconto de R\$100,00 que corresponde a um quinto de R\$500,00. Logo, um desconto de 20%. Ou ainda, sendo x o valor do produto e d o desconto, pode-se escrever:

$$4 \cdot x = 5 \cdot x \cdot (1 - d)$$

$$1 - d = \frac{4x}{5x} \rightarrow 1 - d = 0,8 \rightarrow d = 1 - 0,8 \rightarrow d = 0,2 = 20\%$$

**10 | E**

Fazendo os cálculos:

$$x = 4 \Rightarrow x = 4 + 7 = 11 \Rightarrow x = 11 + 7 = 18 \Rightarrow x = 18 + 7 = 25 \Rightarrow x = 25 + 7 = 32 \Rightarrow x = 32 + 7 = 39$$

$$y = 0 \Rightarrow y = 0 + 11 = 11 \Rightarrow y = 11 + 18 = 29 \Rightarrow y = 29 + 25 = 54 \Rightarrow y = 54 + 32 = 86 \Rightarrow y = 86 + 39 = 125$$

**11 | D**

Calculando:

Gasolina

$$\rightarrow \frac{240 \text{ km/dia}}{12 \text{ km/L}} = 20 \text{ litros/dia} \times \text{R\$ } 3,50/\text{m}^3 = \text{R\$ } 70/\text{dia}$$

GNV

$$\rightarrow \frac{240 \text{ km/dia}}{15 \text{ km/m}^3} = 16 \text{ m}^3/\text{dia} \times \text{R\$ } 2,00/\text{m}^3 = \text{R\$ } 32/\text{dia}$$



Economia por dia  $\rightarrow 70 - 32 = 38$  reais

$$\frac{3.819}{38} = 100,5 \rightarrow 101 \text{ dias}$$

**12| C**

A contrapositiva de

$$(x^2 = 4) \Rightarrow (y^2 - 3y = 0)$$

é

$$(y^2 - 3y \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4) \Leftrightarrow ((y \neq 0 \wedge y \neq 3) \Rightarrow (x \neq -2 \wedge x \neq 2)).$$

Portanto, se  $y = 2$ , então  $x \neq 2$  e  $x \neq -2$ .

**13| C**

$$24 \text{ h} \text{ — } 54 \text{ TAS}$$

$$7 \text{ h} \text{ — } x$$

$$x = 15,75 \text{ TAS}$$

$$60 \text{ min} \text{ — } \frac{15,75}{7} \text{ TAS}$$

$$40 \text{ min} \text{ — } y$$

$$y = 1,5 \text{ TAS}$$

$$7 \text{ h } 40 \text{ min} = 15,75 \text{ TAS} + 1,5 \text{ TAS} = 17,25 \text{ TAS}$$

**14| E**

Sendo verdadeiras as proposições “Se Maria é casada, então Paula é divorciada” e “Se Paula não é divorciada, então Laura é casada”, usemos o fato de que as proposições, respectivamente, equivalentes “Maria não é casada ou Paula é divorciada” e “Paula é divorciada ou Laura é casada” também são verdadeiras.

A proposição “Ou Laura não é casada ou Maria é casada” é uma disjunção exclusiva. Logo, sendo verdadeira essa proposição, as proposições “Laura não é casada” e “Maria é casada” não podem ser ambas verdadeiras e nem ambas falsas.

Supondo que “Laura não é casada” é falsa e “Maria é casada” é verdadeira, podemos concluir de “Maria não é casada ou Paula é divorciada” que “Paula é divorciada” é verdadeira, pois, caso contrário, tal disjunção seria falsa.

Por outro lado, supondo que “Laura não é casada” é verdadeira e “Maria é casada” é falsa, podemos concluir de “Paula é divorciada ou Laura é casada” que “Paula é divorciada” é verdadeira.

Em consequência, Paula deve ser divorciada.

**15| C**

“Nenhum nefelibata é pragmático”

Equivalência

“Todo nefelibata é não pragmático”

Negação

“Algum nefelibata é pragmático”

**16| C**

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2016} - \sqrt{2015} &= \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2015}} \\ \sqrt{2017} - \sqrt{2016} &= \frac{1}{\sqrt{2017} + \sqrt{2016}} \\ (2\sqrt{2.016})^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2016} + \sqrt{2016}} \end{aligned} \right\} \sqrt{2017} - \sqrt{2016} > (2\sqrt{2.016})^{-1} > \sqrt{2016} - \sqrt{2015}$$

**17| E**

Se Renato falou a verdade, então ele não é o ladrão e, assim, Aníbal é o gatuno. Portanto, Aníbal mente e Cláudio é o ladrão, o que é absurdo.

Em consequência, Renato mentiu e Aníbal não roubou a joia. Logo, Aníbal fala a verdade e, portanto, Cláudio não é o ladrão. Mas se Cláudio não roubou a joia, então ele fala a verdade, implicando no fato de que Renato é o ladrão.

**18| B**

Após um desconto de 21% sobre o valor  $x$ , seu novo valor passará a ser  $x \cdot (1 - 0,21)$ , ou seja,  $0,79 x$ .

Dessa forma, a função  $f$  que representa o valor a ser pago após um desconto de 21% sobre o valor de um produto é  $f(x) = 0,79 x$ .

## OUTRAS EQUAÇÕES

EQUAÇÕES POLINOMIAIS  
EQUAÇÕES EXPONENCIAIS  
EXPRESSÕES E FRAÇÕES  
ALGÈBRICAS  
EXPRESSÕES NUMÉRICAS  
FATORAÇÃO E PRODUTOS  
NOTÁVEIS

**01** | Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot 3^y \end{cases}$$

Na solução desse sistema, tem-se  $x = a$  e  $y = b$ . As-

sim, o valor da expressão  $\frac{(a-3b)(b-a)}{3(b+a)}$  é

**A** -1.

**B**  $-\frac{1}{2}$ .

**C**  $\frac{1}{5}$ .

**D**  $\frac{1}{3}$ .

**02** | No estudo de uma população de bactérias, identificou-se que o número  $N$  de bactérias,  $t$  horas após o início do estudo, é dado por  $N(t) = 20 \cdot 2^{15t}$ .

Nessas condições, em quanto tempo a população de mosquitos duplicou?

**A** 15 min.

**B** 20 min.

**C** 30 min.

**D** 40 min.

**E** 45 min.

**03** | A diferença entre o maior e o menor valor de  $x$ , na equação exponencial  $25^{\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 15\right)} = \frac{1}{125^{(-3x+6)}}$  é igual a:

**A** 1

**B** 7

**C**  $\frac{1}{2}$

**D**  $\frac{7}{2}$

**E**  $-\frac{3}{2}$

**04** | Se os números de divisores positivos de 6, de 9 e de 16 são as raízes da equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , onde os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, então, o valor do coeficiente  $b$  é

**A** 41.

**B** 45.

**C** 43.

**D** 47.

**05** | Considere a equação  $x^4 - 2ax^3 + 9ax^2 - 6ax + 9a = 0$ . Sabendo que  $a$  é raiz dupla dessa equação e não é nulo, determine o valor de  $a$ .

**A**  $a = -1$

**B**  $a = 1$

**C**  $a = 2$

**D**  $a = 3$

**E**  $a = 4$



**06** Um polinômio de quinto grau tem 2 como uma raiz de multiplicidade 3. A razão entre o coeficiente do termo de quarto grau e o coeficiente do termo de quinto grau é igual a  $-7$ . A razão entre o termo independente e o coeficiente do termo de quinto grau é igual a 96.

A menor raiz desse polinômio vale

- A** 0
- B**  $-1$
- C**  $-2$
- D**  $-3$

**07** O número real  $\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$  pertence ao conjunto

- A**  $[-5, -3)$
- B**  $[-3, -1)$
- C**  $[-1, 1)$
- D**  $[1, 3)$
- E**  $[3, 5)$

**08** A equação algébrica  $x^3 - 7x^2 + kx + 216 = 0$ , em que  $k$  é um número real, possui três raízes reais. Sabendo-se que o quadrado de uma das raízes dessa equação é igual ao produto das outras duas, então o valor de  $k$  é igual a

- A**  $-64$ .
- B**  $-42$ .
- C**  $-36$ .
- D**  $18$ .
- E**  $24$ .

**09** Sejam  $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  um polinômio e  $M$  o conjunto dos números reais  $k$  tais que  $P(k) = 0$ . O número de elementos de  $M$  é

- A** 1.
- B** 2.
- C** 4.
- D** 5.

**10** Sobre uma equação linear de grau  $n$  é **INCORRETO** afirmar que

- A** terá  $n$  raízes complexas.
- B** se  $n$  for ímpar, sempre terá, ao menos, uma raiz real.
- C** se um número complexo  $z = a + bi$ ,  $b \neq 0$  for raiz, então seu conjugado também o será.
- D** a equação não pode ter raízes repetidas.
- E** uma equação acima de grau 4 pode ter todas as raízes reais.

**11** As três raízes da equação  $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$  são  $m$ ,  $n$  e  $p$ . Sabendo que  $m$  e  $n$  são complexas e que  $p$  é uma raiz racional, o valor de  $m^2 + n^2$  é igual a

- A**  $-18$
- B**  $-10$
- C** 0
- D** 4
- E** 8

**12** Se  $u, v$  e  $w$  são números reais tais que  $u + v + w = 17$ ,  $u \cdot v \cdot w = 135$  e  $u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w = 87$ ,

então, o valor da soma  $\frac{u}{v \cdot w} + \frac{v}{u \cdot w} + \frac{w}{u \cdot v}$  é

- A**  $\frac{23}{27}$ .
- B**  $\frac{17}{135}$ .
- C**  $\frac{27}{87}$ .
- D**  $\frac{16}{27}$ .

**13** Determine o valor do produto  $(3x + 2y)^2$ , sabendo que  $9x^2 + 4y^2 = 25$  e  $xy = 2$ .

- A** 27.
- B** 31.
- C** 38.
- D** 49.
- E** 54.





**14** Quando resolvemos a expressão  $(7.777)^2 - (2.223)^2$ , encontramos o seguinte resultado:

**A**  $5,554 \cdot 10^0$

**B**  $5,554 \cdot 10^2$

**C**  $5,554 \cdot 10^4$

**D**  $5,554 \cdot 10^7$

**E**  $5,554 \cdot 10^8$

**15** Simplificando a expressão

$$\frac{a^4 + b^4 + ab^3 + a^3b + ab^2 + a^2b}{a^2 - b^2}, \quad a \neq b, \text{ obtém-se:}$$

**A**  $\frac{a}{b}$

**B**  $\frac{a+b}{a-b}$

**C**  $\frac{a^3 + ab + b^3}{a-b}$

**D**  $\frac{3(a+ab+b)}{a+b}$

**16** Um fazendeiro possui dois terrenos quadrados de lados  $a$  e  $b$ , sendo  $a > b$ . Represente na forma de um produto notável a diferença das áreas destes quadrados.

**A**  $(a+b) \cdot (a+b)$

**B**  $(a+b) \cdot (a-b)$

**C**  $(a-b) \cdot (a-b)$

**D**  $(a+b)^2$

**E**  $(a-b)^2$

**17** Simplificando as expressões

$$A = \frac{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{xy}} \quad \text{e} \quad B = \frac{x^2 - xy}{2x}, \quad \text{nas quais}$$

$y > x > 0$ , é correto afirmar que

**A**  $\frac{A}{B} = 2^{-1}$

**B**  $\frac{B}{A} \in \mathbb{Q}$

**C**  $A \cdot B > 0$

**D**  $A + B > 0$

**18** Se  $x - y = 2$  e  $x^2 + y^2 = 8$ , então  $x^3 - y^3$  é igual a

**A** 12.

**B** 14.

**C** 16.

**D** 18.

**E** 20.

**19** Se  $x$  e  $y$  são dois números reais positivos, então

a expressão  $M = \left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2$  é equivalente a

**A**  $\sqrt{xy}$ .

**B**  $2xy$ .

**C**  $4xy$ .

**D**  $2\sqrt{xy}$ .

**20** Uma indústria fabrica uma placa metálica no formato de um retângulo de lados  $(ax + by)$  e  $(bx + ay)$ . Encontre, de forma fatorada, o perímetro deste retângulo.

**A**  $2(a+b)(x+y)$ .

**B**  $4(a+b)(x+y)$ .

**C**  $2(a-b)(x-y)$ .

**D**  $4(a-b)(x-y)$ .

**E**  $(a+b)(x+y)$ .

**21** Considere as seguintes afirmações:

I.  $\frac{x^2 + 1}{x + 2} = \frac{x + 1}{2}$ , para todo  $x \in \mathbb{Q}$ .





II.  $2x + 5 = 2(x + 5)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

III.  $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Assim, é CORRETO afirmar que:

- A** somente a afirmação I está correta.
- B** somente a afirmação II está correta.
- C** somente as afirmações I e II estão corretas.
- D** somente a afirmação III está correta.
- E** as três afirmações estão corretas.

**22** | A expressão  $\left(\frac{2}{3} - 0,333\ldots\right)^2 + \sqrt{0,111\ldots}$  tem resultado:

- A** 0.
- B** 1.
- C**  $\frac{1}{9}$ .
- D**  $\frac{1}{3}$ .
- E**  $\frac{4}{9}$ .

**23** | A cidade fictícia de Martim Afonso é uma das mais antigas do seu país. A expressão abaixo indica o ano em que ela foi fundada.

$$10^2 \times \sqrt{25} \times 3 + 4^2 + 16$$

Assinale a alternativa que apresenta o ano em que a cidade de Martim Afonso foi fundada.

- A** 1.524.
- B** 1.532.
- C** 1.542.
- D** 1.632.
- E** 1.624.

**24** | Determine o valor de  $(3^3 + 5^2) \div 2^2$ .

- A** 13.
- B** 14.
- C** 15.
- D** 16.
- E** 17.

**25** | Para uma sequência finita  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de números reais, a soma de Cesaro é definida como  $\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$ , onde  $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

Se a soma de Cesaro da sequência de 2.016 termos  $(a_1, a_2, \dots, a_{2.016})$  é 6.051, então a soma de Cesaro da sequência de 2.017 termos  $(1, a_1, a_2, \dots, a_{2.016})$  é:

- A** 6.049
- B** 6.053
- C** 6.052
- D** 6.050
- E** 6.051

**26** | Com relação à potenciação e radiciação, analise as assertivas abaixo.

I. O resultado da expressão  $5 \times 3^3 + 36 : \sqrt{16} - 7$  igual a 137.

II. O resultado da expressão  $16 - 2^4 : 4 + \sqrt{225} \times 27$  está entre 420 e 440.

III. A raiz quadrada de oitenta e um é igual a três elevado ao quadrado.

É correto o que se afirma em

- A** III, apenas.
- B** I, apenas.
- C** I e III, apenas.
- D** II, apenas.
- E** I, II e III.

**27** | Considere as expressões numéricas abaixo.

$$A = -10 + 6 \cdot 4$$

$$B = 2^5 - \sqrt{64}$$

É correto afirmar que o valor de  $A + B$  é

- A** 8
- B** 16
- C** 26
- D** 38

**28** | Sabendo que  $a$  e  $b$  são números reais tais que  $-1 < a < 0$  e  $1 < b < 3$ , então:

- A**  $\frac{1}{a} > 1$ .
- B**  $\frac{1}{a} < -1$ .



**C**  $1 < \frac{1}{a} < 2.$

**D**  $\frac{1}{a} = 0.$

**E**  $\frac{1}{a} > b.$

**29** | O valor numérico da expressão  $E = \frac{xy^2 - xy}{x^3 - x}$ , para  $x = 4$  e  $y = -3$ , é

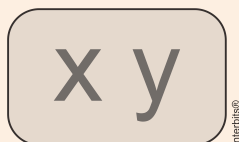
**A**  $-\frac{1}{5}$

**B**  $\frac{2}{5}$

**C**  $-\frac{3}{5}$

**D**  $\frac{4}{5}$

**30** | Em uma atividade com sua turma, um professor utilizou 64 cartões, cada um com dois algarismos  $x$  e  $y$ , iguais ou distintos, pertencentes ao conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . A imagem abaixo representa um tipo desse cartão.



Um aluno escolheu um único cartão e efetuou as seguintes operações em sequência:

I. multiplicou um dos algarismos do cartão escolhido por 5;

II. acrescentou 3 unidades ao produto obtido em I;

III. multiplicou o total obtido em II por 2;

IV. somou o consecutivo do outro algarismo do cartão ao resultado obtido em III.

Ao final dessas operações, obteve-se no sistema decimal o número 73.

O cartão que o aluno pegou contém os algarismos cuja soma  $x + y$  é:

**A** 15

**B** 14

**C** 13

**D** 12

## GABARITO

**01** | **C**

Tem-se que

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot 3^y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x + 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot (2^x + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^y = 2^x + 1 \\ 2^x = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\frac{(a - 3b)(b - a)}{3(b + a)} = \frac{(3 - 3 \cdot 2)(2 - 3)}{3 \cdot (2 + 3)} = \frac{1}{5}.$$

**02** | **D**

Calculando o número inicial de bactérias, temos:

$$N(0) = 20 \cdot 2^{15 \cdot 0} = 20$$

Vamos determinar o valor de  $t$  em horas de modo que o número de bactérias seja 40.

$$40 = 20 \cdot 2^{15 \cdot t}.$$

$$2 = 2^{15 \cdot t}$$

$$15 \cdot t = 1$$

$$t = \frac{1}{15} = \frac{2}{3}h$$

$$\frac{2}{3}h = \frac{2 \cdot 60 \text{ min}}{3} = 40 \text{ min}$$

**03** | **B**

Calculando:

$$\begin{aligned} 25^{\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 15\right)} &= \frac{1}{125^{(-3x+6)}} \rightarrow 25^{\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 15\right)} = \frac{1}{5^{(-3x+6)} \cdot 25^{(-3x+6)}} \\ 25^{\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 15\right)} \cdot 5^{(-3x+6)} \cdot 25^{(-3x+6)} &= 1 \rightarrow 5^{2\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 15\right)} \cdot 5^{(-3x+6)} \cdot 5^{2(-3x+6)} = 1 \\ 5^{(x^2 + 8x - 30 - 3x + 6 - 6x + 12)} &= 1 \rightarrow 5^{(x^2 - x - 12)} = 1 \\ x^2 - x - 12 = 0 &\rightarrow \begin{cases} x' = -4 \\ x'' = 3 \end{cases} \rightarrow 3 - (-4) = 7 \end{aligned}$$

**04** | **D**

É imediato que 6 possui 4 divisores positivos, 9 possui 3 divisores positivos e 16 possui 5 divisores positivos. Logo, temos



$$(x-4)(x-3)(x-5) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$$

$$= x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Portanto, comparando os coeficientes dos termos de mesmo grau, vem  $b = 47$ .

### 05 | ANULADA

Questão anulada no gabarito oficial.

Se  $a$  é raiz dupla podemos dividir o polinômio  $x^4 - 2ax^3 + 9ax^2 - 6ax + 9a$  consecutivamente

por  $(x - a)$ .

|   |   |     |                     |                                         |                                                         |
|---|---|-----|---------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| a | 1 | -2a | +9a                 | -6a                                     | 9a                                                      |
| a | 1 | -a  | 9a - a <sup>2</sup> | 9a <sup>2</sup> - a <sup>3</sup> - 6a   | 9a <sup>3</sup> - a <sup>4</sup> - 6a <sup>2</sup> + 9a |
|   | 1 | 0   | 9a - a <sup>2</sup> | 18a <sup>2</sup> - 2a <sup>3</sup> - 6a | zero                                                    |
|   |   |     |                     | zero                                    |                                                         |

Resolvendo a equação, temos:

$$18a^2 - 2a^3 - 6a = 0 \Rightarrow -2a \cdot (a^2 - 9a + 3) = 0$$

Resolvendo a equação, temos:  $a = 0$  ou

$$a^2 - 9a + 3 = 0$$

$$a = \frac{9 \pm \sqrt{69}}{2}$$

Portanto, não há alternativa correta.

### 06 | D

Seja  $p(x) = (x-2)^3(x-a)(x-b)$ , em que  $a$  e  $b$  são raízes de  $p$ . Logo, temos

$$p(x) = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x^2 - (a+b)x + ab)$$

$$= x^5 - (a+b+6)x^4 + (ab+6(a+b)+12)x^3 - (6ab+12(a+b)+8)x^2 + (12ab+8(a+b))x - 8ab.$$

Em consequência, vem

$$\begin{cases} \frac{a+b+6}{1} = -7 \\ \frac{8ab}{1} = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = -13 \\ ab = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$$

Portanto, segue que a menor raiz de  $p$  é  $-3$ .

### 07 | D

Considerando que  $x = \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}$ , temos:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)^3$$

$$x^3 = \frac{50}{8} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}}\right)$$

$$x^3 = \frac{50}{8} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25^2 - 121 \cdot 2}{64}} \cdot x$$

$$x^3 = \frac{25}{4} - \frac{21}{4}x$$

$$4 \cdot x^3 + 21x - 25 = 0$$

Sabemos que  $1$  é raiz da equação acima, pois a soma de seus coeficientes é nula.

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos fatorar a equação.

|   |   |   |    |     |
|---|---|---|----|-----|
| 1 | 4 | 0 | 21 | -25 |
| 2 | 4 | 4 | 25 | 0   |

$$(x-1) \cdot (4x^2 + 4x - 25) = 0$$

O fator do segundo grau não possui raiz real, pois seu discriminante é negativo. Portanto,  $x=1$  é a única raiz real da equação. Logo:

$$x = \sqrt[3]{\frac{25}{8} + \frac{11\sqrt{2}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{25}{8} - \frac{11\sqrt{2}}{4}} = 1 \in [1, 3).$$

### 08 | B

Sejam  $a, b$  e  $c$  as raízes da equação, com  $a^2 = bc$ . Logo, pelas Relações de Girard, segue que

$$\begin{cases} a+b+c = 7 \\ ab+ac+bc = k \\ abc = -216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 7 \\ a(b+c) + a^2 = k \\ a^3 = -216 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c = 13 \\ -6 \cdot 13 + 36 = k \\ a = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c = 13 \\ k = -42 \\ a = -6 \end{cases}$$

**09 | A**

É fácil ver, por inspeção, que  $x = -1$  é raiz de P. Logo, temos  $P(x) = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$ . Daí, como  $x^4 + x^2 + 1 = 0$  não possui raízes reais, podemos concluir que a única raiz real de P é  $x = -1$ .

Portanto, sendo M o conjunto das raízes reais de P, vem que a resposta é 1.

**10 | ANULADA**

Questão anulada no gabarito oficial.

[A] Verdadeira: O teorema fundamental da Álgebra nos garante isso.

[B] Falsa: Seria verdadeira se a equação tivesse apenas coeficientes reais.

[C] Falsa: A equação deverá ter coeficientes reais.

[D] Falsa: Algumas equações apresentam raízes com multiplicidade maior que 1; Ex:  $(x-1)^4 = 0$ , o número 1 é raiz quatro vezes desta equação.

[E] Verdadeira: A equação  $(x-1)^4$  possui as 4 raízes iguais a 1.

A questão foi anulada, pois há duas opções corretas, [A] e [E].

**11 | B**

O número 2 é raiz da equação, pois  $2^3 - 6 \cdot 2^2 + 21 \cdot 2 - 26 = 0$ .

Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos fatorar o primeiro membro da equação  $x^3 - 6x^2 + 21x - 26 = 0$ .

|   |   |    |     |     |
|---|---|----|-----|-----|
| 2 | 1 | -6 | +21 | -26 |
|   | 1 | -4 | +13 | 0   |

$$(x-2) \cdot (x^2 - 4x + 13) = 0$$

A equação produto acima possui uma raiz real  $x = 2$  e duas raízes imaginárias m e n, obtidas com a resolução da equação  $(x^2 - 4x + 13) = 0$ .

Sabemos que:

$$(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2 \cdot m \cdot n$$

Utilizando as relações de Girard, podemos escrever que:

$$4^2 = m^2 + n^2 + 2 \cdot 13 \Rightarrow m^2 + n^2 = -10.$$

**12 | A**

Sabendo que

$$\begin{aligned} (u+v+w)^2 &= u^2 + v^2 + w^2 + 2 \cdot (u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w) \Leftrightarrow \\ u^2 + v^2 + w^2 &= 17^2 - 2 \cdot 87 \Leftrightarrow \\ u^2 + v^2 + w^2 &= 115, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{u}{v \cdot w} + \frac{v}{u \cdot w} + \frac{w}{u \cdot v} &= \frac{u^2 + v^2 + w^2}{u \cdot v \cdot w} \\ &= \frac{115}{135} \\ &= \frac{23}{27}. \end{aligned}$$

**13 | D**

Aplicando a fórmula do quadrado perfeito temos:

$$\begin{aligned} (3x+2y)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 \\ (3x+2y)^2 &= 9x^2 + 4y^2 + 12xy \end{aligned}$$

Sabendo que  $9x^2 + 4y^2 = 25$  e  $xy = 2$ .

$$(3x+2y)^2 = 25 + 12 \cdot 2 = 49$$

**14 | D**

$$\begin{aligned} (7.777)^2 - (2.223)^2 &= (7.777 + 2.223) \cdot (7.777 - 2.223) = \\ 10000 \cdot 5.554 &= 5.554 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

**15 | C**

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + b^4 + ab^3 + a^3b + ab^2 + a^2b}{a^2 - b^2} &= \frac{a^4 + a^4b + b^4 + ab^3 + ab^2 + a^2b}{(a+b) \cdot (a-b)} = \\ \frac{a^3 \cdot (a+b) + b^3 \cdot (a+b) + a \cdot b \cdot b(a+b)}{(a+b) \cdot (a-b)} &= \frac{(a^3 + b^3 + a \cdot b) \cdot (a+b)}{(a+b) \cdot (a-b)} = \frac{(a^3 + b^3 + a \cdot b)}{(a-b)} \end{aligned}$$

**16 | B**

Sendo a área do quadrado o produto do seus lados, temos que:

$$\text{Área terreno 1} = a \cdot a$$

$$\text{Área terreno 1} = a^2$$



Área terreno 2 =  $b \cdot b$

Área terreno 2 =  $b^2$

Logo, como  $a > b$ , a diferença entre as áreas é dada por:

Área terreno 1 – Área terreno 2 =  $a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

### 17| C

$$A = \frac{\left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \cdot x^2}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 2\sqrt{x} \cdot y} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{x^2} \cdot x^2}{x - 2\sqrt{xy} + y + 2\sqrt{xy}} = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x - y) \cdot (x + y)}{x + y} = x - y$$

$$B = \frac{x^2 - xy}{2x} = \frac{x \cdot (x - y)}{2x} = \frac{x - y}{2}$$

Como  $y > x > 0$ , concluímos que  $A < 0$  e  $B < 0$ , portanto,  $A \cdot B > 0$ .

### 18| E

$$x - y = 2 \Rightarrow (x - y)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 4 \Rightarrow 8 - 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2$$

Logo,

$$x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + y^2 + xy) = 2 \cdot (8 + 2) = 20$$

### 19| C

$$M = \left(x\sqrt{\frac{y}{x}} + y\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2 = x^2\sqrt{\frac{y}{x}}^2 + 2 \cdot x\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot y\sqrt{\frac{x}{y}} + y^2\sqrt{\frac{x}{y}}^2 = x^2 \cdot \frac{y}{x} + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \cdot \frac{x}{y} = x \cdot y + 2 \cdot x \cdot y + x \cdot y = 4 \cdot x \cdot y$$

### 20| A

Sendo o perímetro (2p) de um retângulo dado pela soma de todos seus 4 lados e que os lados paralelos possuem as mesmas medidas, temos que:

$$2p = (ax + by) + (ax + by) + (bx + ay) + (bx + ay)$$

$$2p = 2 \cdot ax + 2 \cdot bx + 2 \cdot ay + 2 \cdot by$$

Fatorando e reagrupando, temos:

$$2p = 2x \cdot (a + b) + 2y \cdot (a + b)$$

$$2p = 2 \cdot (a + b) \cdot (x + y)$$

### 21| D

[I] Falsa. Para  $x = 1$ , temos  $\frac{2}{3} = 1$ . Absurdo.

[II] Falsa. Para  $x = 1$ , vem  $7 = 12$ . Absurdo.

[III] Verdadeira. De fato, pois para todo  $x$  real tem-se

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &= (x - 2)(x - 2) \\ &= x^2 - x \cdot 2 - 2 \cdot x + 2^2 \\ &= x^2 - 4x + 4.\end{aligned}$$

### 22| E

Utilizando a propriedade de funções geratriz, temos:

$$\left(\frac{2}{3} - 0,333\ldots\right)^2 + \sqrt{0,111\ldots} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \sqrt{\frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

### 23| B

Resolvendo a expressão temos:

$$10^2 \times \sqrt{25} \times 3 + 4^2 + 16 = 100 \times 5 \times 3 + 16 + 16 = 100 \times 5 \times 3 + 16 + 16 = 1500 + 32 = 1532$$

### 24| A

$$(3^3 + 5^2) \div 2^2 = (27 + 25) \div 4 = 52 \div 4 = 13$$

### 25| A

Calculando para 2016 termos:

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2016}}{2016} = 6051 \Rightarrow \frac{a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})}{2016} = 6051$$

$$a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016}) = 6051 \cdot 2016$$

Calculando para 2017 termos:

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{2017}}{2017} = x \Rightarrow \frac{1 + (1 + a_1) + (1 + a_1 + a_2) + \dots + (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})}{2017} = x$$

$$\frac{2017 + [a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_{2016})]}{2017} = x \Rightarrow \frac{2017 + 6051 \cdot 2016}{2017} = x$$

$$x = 6049$$

### 26| C

[I] Verdadeira.

$$5 \times 3^3 + 36 : \sqrt{16} - 7 = 5 \times 27 + 36 : 4 - 7 = 135 + 9 - 7 = 137$$

[II] Falsa.

$$16 - 2^4 : 4 + \sqrt{225} \times 27 = 16 - 16 : 4 + \sqrt{225} \times 27 = 0 : 4 + 15 \times 27 = 0 + 405 = 405$$

[III] Verdadeira.  $\sqrt{81} = 3^2 \Leftrightarrow 9 = 9$

### 27| D

Resolvendo as expressões:

$$A = -10 + 6 \cdot 4 \Rightarrow A = -10 + 24 \Rightarrow A = 14$$

$$B = 2^5 - \sqrt{64} \Rightarrow B = 32 - 8 \Rightarrow B = 24$$

Logo,  $A + B = 14 + 24 \Rightarrow A + B = 38$

**28 | B**

[A]  $\frac{1}{a} > 1$  é falsa, pois, o intervalo em que "a" está compreendido só possui números negativos, logo,  $\frac{1}{a}$  é necessariamente um número negativo, desta forma, nunca será maior que 1.

[B]  $\frac{1}{a} < -1$  é verdadeira, pois  $-1$  é limitante do intervalo em que "a" está compreendido. Note que:  
 $-1 < a < 0 \rightarrow a > -1$

Invertendo-se ambos lados:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{-1} \rightarrow \frac{1}{a} < -1. \text{ Resposta procurada.}$$

Observe que ao inverter ambos os lados, o sinal de desigualdade também é invertido.

[C]  $1 < \frac{1}{a} < 2$  é falsa, pois todos os números do intervalo em que "a" está compreendido são negativos,

logo, qualquer número que "a" receba em  $\frac{1}{a}$  será negativo e jamais poderá estar compreendido entre dois números positivos.

[D]  $\frac{1}{a} = 0$  é falsa, pois não existe divisão por número real que resulte em 0.

[E]  $\frac{1}{a} > b$  é falsa, pois todos os números do intervalo em que "a" está compreendido são negativos e todos os números do intervalo em que "b" está compreendido são positivos, logo, qualquer número que

"a" receba em  $\frac{1}{a}$  será negativo e jamais maior que "b".

**29 | D**

Substituindo os valores  $x = 4$  e  $y = -3$  na expressão temos:

$$E = \frac{xy^2 - xy}{x^3 - x} = \frac{4 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3)}{4^3 - 4}$$

$$E = \frac{4 \cdot 9 + 12}{64 - 4} = \frac{36 + 12}{64 - 4} = \frac{48}{60}$$

$$E = \frac{4}{5}$$

**30 | D**

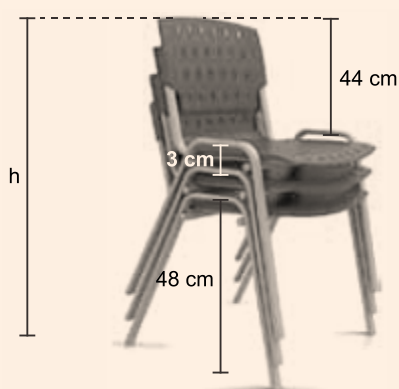
Tomando arbitrariamente o algarismo  $x$ , vem

$$(5x + 3) \cdot 2 + (y + 1) = 73 \Leftrightarrow y = 66 - 10x.$$

Logo, como  $1 \leq y \leq 8$ , só pode ser  $x = 6$  e, assim, temos  $y = 6$ .

A resposta é  $x + y = 12$ .

**01** A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo  $h$  a altura da pilha em relação ao chão.



(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de  $n$  cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m se  $n$  for igual a

- A** 14.
- B** 17.
- C** 13.
- D** 15.
- E** 18.

**02** Uma função  $f$  é definida apenas para números naturais, de modo que  $f(0) = 8$ ,  $f(1) = 2$  e

$f(n) = \frac{f(n-1)}{f(n-2)}$  para  $n > 1$ . O valor de  $f(50)$  é:

- A**  $\frac{1}{8}$
- B**  $\frac{1}{4}$
- C** 8

**D** 2

**E** 1

**03** Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

- A** 414
- B** 438
- C** 456
- D** 484

**04** Na tabela de 8 colunas e infinitas linhas numeradas, indicada na figura, podemos formar infinitos quadrados coloridos  $3 \times 3$ , como mostra um exemplo.

|        |   | COLUNAS |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|---|---------|----|----|----|----|----|----|----|
| LINHAS | 1 | 1       | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
|        | 2 | 9       | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|        | 3 | 17      | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|        | 4 | 25      | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
|        | 5 | 33      | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|        | 6 | 41      | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
|        | 7 | 49      | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
|        | 8 | 57      | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
|        | : | :       | :  | :  | :  | :  | :  | :  | :  |





Nessa tabela, o quadrado colorido  $3 \times 3$  cuja soma dos 9 elementos é igual a 4.806 ocupa três linhas, sendo uma delas a linha

- A** 71.
- B** 67.
- C** 53.
- D** 49.
- E** 41.

**05** O quadro numérico apresentado a seguir é construído segundo uma lógica estrutural.

|     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 3   | 5   | 7   | 9   | ... | 101 |
| 3   | 3   | 5   | 7   | 9   | ... | 101 |
| 5   | 5   | 5   | 7   | 9   | ... | 101 |
| 7   | 7   | 7   | 7   | 9   | ... | 101 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 101 | 101 | 101 | 101 | 101 | ... | 101 |

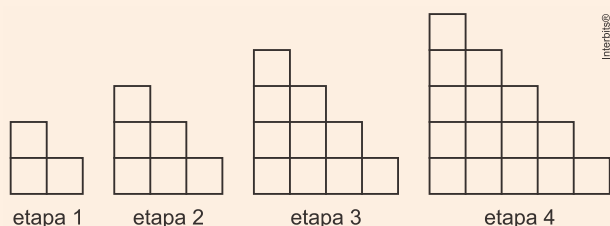
Considerando a lógica estrutural do quadro acima, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que estão na linha de número 41 é

- A** 4.443.
- B** 4.241.
- C** 4.645.
- D** 4.847.

**06** Considere esses quatro valores  $x$ ,  $y$ ,  $3x$ ,  $2y$  em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

- A** 9
- B** 12
- C** 15
- D** 18

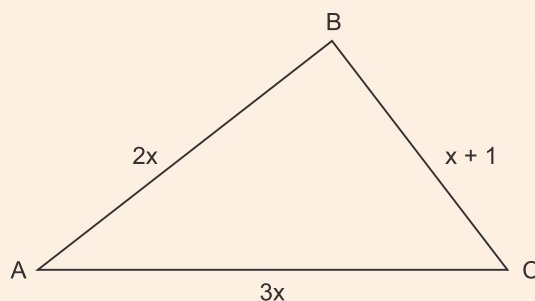
**07** Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.



Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é

- A** 1.331.
- B** 3.050.
- C** 5.050.
- D** 5.100.
- E** 5.151.

**08** As medidas dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  de um triângulo  $ABC$  formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.



Qual é a medida do perímetro desse triângulo?

- A** 5
- B** 6
- C** 7
- D** 8
- E** 9

**09** Seja  $a_n$  uma sequência de números reais cujo

termo geral é  $a_n = \frac{1}{4} - n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

- A**  $a_n$  é uma progressão aritmética de razão  $-1$ .
- B**  $a_n$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{4}$ .
- C**  $a_n$  é uma progressão geométrica de razão 4.
- D**  $a_n$  não é uma progressão (nem geométrica, nem aritmética).
- E**  $a_n$  é simultaneamente uma progressão aritmética e geométrica.



**10** | Considere a matriz  $A_{n \times 9}$  de nove colunas com números inteiros consecutivos, escrita a seguir.

$$A_{n \times 9} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se o número 18.109 é um elemento da última linha, linha de ordem  $n$ , o número de linhas dessa matriz é:

- A** 2.011
- B** 2.012
- C** 2.013
- D** 2.014

**11** | Na progressão geométrica  $(1, 2, 4, 8, \dots)$ , sendo  $a_n$  o  $n$ -ésimo termo e  $S_n$  a soma dos  $n$  primeiros termos, podemos concluir que:

- A**  $S_n = 2 \cdot a_n$
- B**  $S_n = a_n + 1$
- C**  $S_n = a_{n+1} + 1$
- D**  $S_n = a_{n+1} - 1$
- E**  $S_n = 2 \cdot a_{n+1}$

**12** | A sequência numérica  $c_n$  é definida como  $c_n = a_n \cdot b_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , em que  $a_n$  e  $b_n$  são progressões aritmética e geométrica, respectivamente.

Sabendo-se que  $a_5 = b_5 = 10$  e as razões  $a_n$  e  $b_n$  são iguais a 3, o termo  $c_8$  é igual a

- A** 100
- B** 520
- C** 1.350
- D** 3.800
- E** 5.130

**13** | Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(nx) = [f(x)]^n$  para todo número inteiro  $n$  e todo número real  $x$ . Se  $f(1) = 3$ , então, o valor da soma

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7)$  é

- A** 4.568.
- B** 2.734.
- C** 3.117.
- D** 3.279.

**14** | A sequência  $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ , onde  $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{9}{2}, \dots, a_{10} = \frac{1.025}{2}$  é de tal forma que para cada  $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$  temos que  $a_n = b_n + c_n$ , onde  $(b_1, b_2, \dots, b_{10})$  é uma PG com  $b_1 \neq 0$  e de razão  $q \neq \pm 1$  e  $(c_1, c_2, \dots, c_{10})$  é uma PA constante.

Podemos afirmar que  $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$  é igual a

- A** 98
- B** 172
- C** 260
- D** 516
- E** 1.028

**15** | Uma calculadora possui duas teclas especiais:

- a tecla A, que triplica o número que aparece no visor; e

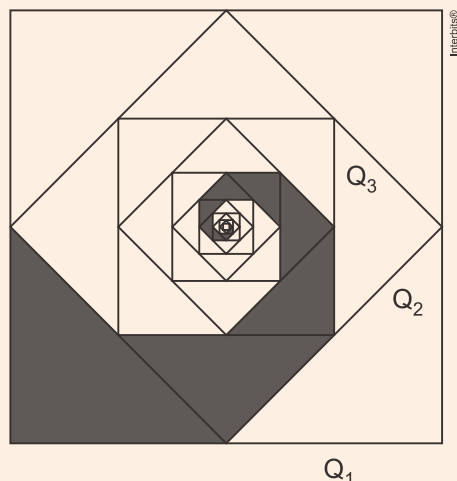
- a tecla B, que soma 4 unidades ao número que aparece no visor.

Suponha que no visor esteja o número 12. Ao apertar, primeiramente, a tecla A um total de 9 vezes e, logo em seguida, ao apertar a tecla B um total de 4 vezes obtemos uma sequência de 13 resultados. É correto afirmar que:

- A** a soma dos 9 primeiros resultados é  $6 \cdot (3^{10} - 1)$ .
- B** a soma dos 4 últimos resultados é  $20 \cdot (3^{10} + 2)$ .
- C** o 12º resultado é  $12 \cdot (3^9 + 1) + 4$ .
- D** o 10º resultado é  $12 \cdot (3^9)$ .
- E** a soma dos 13 resultados é  $22 \cdot (3^{10} + 1)$ .



**16|** Na figura abaixo, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado ( $Q_1$ ) tem lado 1. O quadrado  $Q_2$  está construído com vértices nos pontos médios dos lados de  $Q_1$ ; o quadrado  $Q_3$  está construído com vértices nos pontos médios dos lados de  $Q_2$  e, assim, sucessiva e infinitamente.



A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é

- A**  $\frac{1}{2}$ .
- B**  $\frac{1}{4}$ .
- C**  $\frac{1}{8}$ .
- D**  $\frac{1}{16}$ .
- E**  $\frac{1}{32}$ .

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.

Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.

Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

<http://tinyurl.com/zh8daj6> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

**17|** Com relação à Ninhada II, e adotando o ano de 1996 como o 1º termo ( $a_1$ ) de uma Progressão Aritmética, a expressão algébrica que melhor representa o termo geral ( $a_n$ ) da sequência de anos em que essas cigarras saíram à superfície, com  $n \in \mathbb{N}^*$ , é dada por

- A**  $a_n = 17 \cdot n + 1979$
- B**  $a_n = 17 \cdot n + 1998$
- C**  $a_n = 17 \cdot n + 2013$
- D**  $a_n = 1996 \cdot n + 17$
- E**  $a_n = 1979 \cdot n + 17$

## GABARITO

**01| B**

Tem-se que a altura  $h$ , em centímetros, de uma pilha de  $n$  cadeiras,  $n \geq 1$ , em relação ao chão, é dada por

$$h = 48 + 3(n - 1) + 44 = 3n + 89.$$

Portanto, se  $h = 140$  cm, então  $140 = 3n + 89 \Leftrightarrow n = 17$ .

**02| B**

Dado que  $f(0) = 8$ ,  $f(1) = 2$  e  $f(n) = \frac{f(n-1)}{f(n-2)}$ , para  $n > 1$ , vem

$$f(2) = \frac{1}{4}, f(3) = \frac{1}{8}, f(4) = \frac{1}{2}, f(5) = 4, f(6) = 8, f(7) = 2 \text{ e}$$



$$f(8) = \frac{1}{4}.$$

Logo, podemos concluir que

$$f(0) = f(6) = \dots = f(6k),$$

$$f(1) = f(7) = \dots = f(6k+1),$$

$$f(2) = f(8) = \dots = f(6k+2),$$

$$f(3) = f(9) = \dots = f(6k+3),$$

$$f(4) = f(10) = \dots = f(6k+4)$$

e

$$f(5) = f(11) = \dots = f(6k+5),$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Portanto, como  $50 = 6 \cdot 8 + 2$ , temos  $f(50) = f(2) = \frac{1}{4}$ .

### 03 | C

Sendo a quilometragem percorrida uma PA, pode-se escrever:

$$a_1 = 6$$

$$a_n = 42$$

$n$  = número de dias

$$r = 2$$

$$42 = 6 + (n-1) \cdot 2 \rightarrow 18 = n-1 \rightarrow n = 19$$

$$S = \frac{(6+42) \cdot 19}{2} = \frac{48 \cdot 19}{2} \rightarrow S = 456 \text{ km}$$

### 04 | B

Seja o quadrado colorido

|        |        |        |
|--------|--------|--------|
| $k$    | $k+1$  | $k+2$  |
| $k+8$  | $k+9$  | $k+10$ |
| $k+16$ | $k+17$ | $k+18$ |

com  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Logo, sabendo que a soma dos nove elementos desse quadrado é igual a 4.806, temos

$$3k + 24 + 3k + 27 + 3k + 30 = 4806 \Leftrightarrow 9k + 81 = 4806 \\ \Leftrightarrow k = 525.$$

Portanto, escrevendo 525 como

$$525 = 8 \cdot 65 + 5 \\ = 8 \cdot 65 + 8 - 8 + 3 \\ = 8 \cdot 66 - 5,$$

e observando que todo elemento da coluna 3 é da forma  $8n-5$ , com  $n$  sendo o número da linha a que pertence tal elemento, podemos concluir que as linhas ocupadas pelo quadrado colorido dado são 66, 67 e 68.

### 05 | B

Os elementos da primeira coluna constituem uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 1 e razão 2. Logo, o primeiro elemento da linha de número 41 é dado por  $1 + 40 \cdot 2 = 81$ .

Desde que cada elemento da primeira coluna figura  $n$  vezes em cada linha  $n$ , com  $1 \leq n \leq 51$  e  $n \in \mathbb{Z}^+$ , podemos concluir que a resposta é dada por

$$41 \cdot 81 + \left( \frac{83+101}{2} \right) \cdot 10 = 4241.$$

### 06 | B

Desde que a soma dos termos equidistantes dos extremos de uma progressão aritmética finita é constante, vem

$$x + 2y = y + 3x \Leftrightarrow y = 2x.$$

Por outro lado, sendo  $x + 2y = 20$ , temos

$$x + 2 \cdot 2x = 20 \Leftrightarrow x = 4.$$

A resposta é  $3x = 3 \cdot 4 = 12$ .

### 07 | E

Na etapa 1 temos:  $(1+2)$  quadrados.

Na etapa 2 temos:  $(1+2+3)$  quadrados.

Na etapa 3 temos:  $(1+2+3+4)$  quadrados.

$\vdots$

Na etapa 100 temos:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 + 101 = \frac{(1+101) \cdot 101}{2} = 5.151$$

quadrados.

### 08 | A

$(2x, x+1, 3x)$  é uma P.A., então:

$$x+1 = \frac{2x+3x}{2} \Rightarrow 2x+2 = 5x \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Portanto, o perímetro  $P$  será dado por:

$$P = 2x + x + 1 + 3x = 6x + 1$$

$$P = 6 \cdot \frac{2}{3} + 1$$

$$P = 5$$

**09 | A**

Calculando:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ a_2 &= \frac{1}{4} - 2 = \left(\frac{1}{4} - 1\right) - 1 = -\frac{7}{4} \\ a_3 &= \frac{1}{4} - 3 = \left(\left(\frac{1}{4} - 1\right) - 1\right) - 1 = -\frac{11}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{PA} \Rightarrow r = -1$$

Assim, a alternativa correta é a letra [A].

**10 | C**

Tem-se que os elementos de uma mesma coluna estão em progressão aritmética de razão 9. Logo, sendo  $18109 = 9 \cdot 2013 - 8$ , podemos concluir que tal número está situado na primeira coluna e na linha  $n = 2013$ .

**11 | D**

Desde que

$$a_{n+1} = 1 \cdot 2^n \Leftrightarrow a_{n+1} = 2^n,$$

temos

$$S_n = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Leftrightarrow S_n = a_{n+1} - 1.$$

**12 | E**

Tem-se que  $c_8 = a_8 \cdot b_8$ . Logo, sendo  $a_8 = a_5 + 3 \cdot r = 10 + 3 \cdot 3 = 19$  e  $b_8 = b_5 \cdot q^3 = 10 \cdot 3^3 = 270$ , vem  $c_8 = 19 \cdot 270 = 5.130$ .

**13 | D**Tomando  $x = 1$  e sabendo que  $f(1) = 3$ , vem

$$f(n \cdot 1) = [f(1)]^n \Leftrightarrow f(n) = 3^n.$$

Portanto, segue que o resultado é igual a

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \dots + f(7) &= 3^1 + 3^2 + \dots + 3^7 \\ &= 3 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} \\ &= 3279. \end{aligned}$$

**14 | E**

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{10} &= \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} + 2\right) + \left(\frac{1}{2} + 4\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} + 512\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 512) = \\ &= 10 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 5 + 1023 = 1028 \end{aligned}$$

**15 | E**

A soma dos nove primeiros resultados é

$$\begin{aligned} 12 \cdot 3 + 12 \cdot 3^2 + \dots + 12 \cdot 3^9 &= 12 \cdot 3 \cdot \frac{3^9 - 1}{3 - 1} \\ &= 6 \cdot (3^{10} - 3). \end{aligned}$$

A soma dos quatro últimos resultados é igual a

$$\begin{aligned} (12 \cdot 3^9 + 4) + (12 \cdot 3^9 + 8) + (12 \cdot 3^9 + 12) + (12 \cdot 3^9 + 16) &= 4 \cdot 12 \cdot 3^9 + 40 \\ &= 20 \cdot (3^{10} + 2) - 4 \cdot 3^{10}. \end{aligned}$$

O décimo segundo resultado é dado por  $12 \cdot 3^9 + 3 \cdot 4 = 12 \cdot (3^9 + 1)$ .

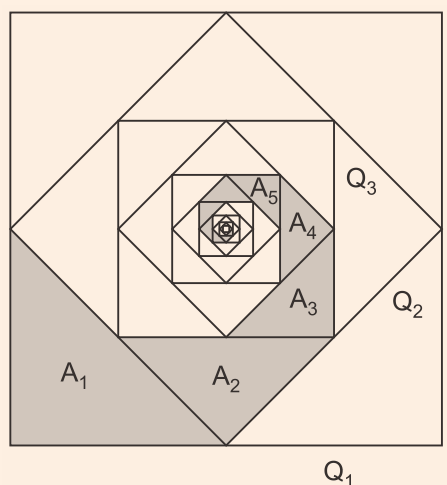
O décimo resultado é  $12 \cdot 3^9 + 4$ .

A soma dos treze resultados é igual a

$$6 \cdot 3^{10} - 18 + 16 \cdot 3^{10} + 40 = 22 \cdot 3^{10} + 22 = 22 \cdot (3^{10} + 1).$$

**16 | B**

A área de cada quadrado, a partir do segundo, é metade da área do quadrado anterior. Portanto, as áreas dos triângulos retângulos assinalados formam um PG

infinita de razão  $\frac{1}{2}$ .

A sequência  $A_1, A_2, A_3, \dots$  é uma PG infinita de razão  $\frac{1}{2}$ .



Calculando a área  $A_1$ , temos:

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a soma de todas as áreas dos triângulos retângulos será dada por:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots$$

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

### 17 | A

Aplicando a fórmula do termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_n = 1.996 + (n-1) \cdot 17$$

$$a_n = 17 \cdot n + 1979$$

Resumo das questões selecionadas nesta atividade

## PROBABILIDADE

**01** Um nadador vai disputar duas provas nas Olimpíadas, primeiro os 100 metros borboleta e depois os 100 metros nado livre. A probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros borboleta é de 70%, ao passo que a de ele vencer ambas é de 60%.

Se ele vencer a prova dos 100 metros borboleta, a probabilidade de ele vencer a prova dos 100 metros nado livre é de aproximadamente

- A** 0,42
- B** 0,86
- C** 0,50
- D** 0,70
- E** 0,60

**02** Um grupo é formado por três homens e duas mulheres. Foram escolhidas, ao acaso, três pessoas desse grupo. Qual é a probabilidade de as duas mulheres do grupo estarem entre as três pessoas escolhidas?

- A**  $\frac{3}{10}$
- B**  $\frac{1}{10}$
- C**  $\frac{2}{5}$
- D**  $\frac{2}{3}$
- E**  $\frac{1}{3}$

**03** Numa aula de matemática, o professor pediu que seus alunos construíssem argumentos, envolvendo conhecimentos sobre probabilidade, a partir do seguinte enunciado: “Um saco contém fichas idênticas, mas com cores diferentes, sendo 2 vermelhas, 4 verdes, 6 amarelas e 3 pretas”. Foram apresentados três argumentos, presentes nas afirmativas a seguir:

I. Mariana falou que, se uma ficha fosse retirada ao acaso, a probabilidade de ela ser preta seria  $\frac{1}{3}$ .

II. Antônia afirmou que, se forem retiradas duas fichas do saco ao acaso, a probabilidade de elas serem vermelhas ou verdes seria de  $\frac{4}{15}$ .

III. Bruna disse: Caso sejam retiradas 3 fichas ao acaso, uma a uma, sem reposição, a probabilidade de sair uma amarela, uma verde e uma vermelha, nessa ordem, será de  $\frac{48}{225}$ .

Analisando as afirmativas das três alunas, é CORRETO afirmar que

- A** apenas I é verdadeira.
- B** apenas I e II são verdadeiras.
- C** apenas II e III são verdadeiras.
- D** I, II e III são verdadeiras.
- E** I, II e III são falsas.

**04** Uma urna contém uma bola branca, quatro bolas pretas e  $x$  bolas vermelhas, sendo  $x > 2$ . Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, é observada e colocada na urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna.

Se  $\frac{1}{2}$  é a probabilidade de que as duas bolas retiradas sejam da mesma cor, o valor de  $x$  é:



**A** 9**B** 8**C** 7**D** 6

**05** Um candidato em um concurso realiza uma prova de múltipla escolha, em que cada questão apresenta 4 alternativas, sendo uma, e apenas uma, correta. Esse candidato sabe 68% das questões da prova; as demais questões, ele marca aleatoriamente uma das alternativas. Então, a probabilidade de ele acertar uma questão qualquer da prova (isto é, de uma questão escolhida ao acaso) é igual a:

**A** 92%.**B** 76%.**C** 93%.**D** 85%.

**06** Considere o conjunto de números naturais abaixo e os procedimentos subsequentes:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

1. Cada número primo de  $A$  foi multiplicado por 3. Sabe-se que um número natural  $P$  é primo se  $P > 1$  e tem apenas dois divisores naturais distintos.

2. A cada um dos demais elementos de  $A$ , foi somado o número 1.

3. Cada um dos números distintos obtidos foi escrito em apenas um pequeno cartão.

4. Dentre todos os cartões, foram sorteados exatamente dois cartões com números distintos ao acaso.

A probabilidade de em pelo menos um cartão sorteado estar escrito um número par é:

**A**  $\frac{5}{12}$ **B**  $\frac{7}{12}$ **C**  $\frac{13}{24}$ **D**  $\frac{17}{24}$ 

**07** Uma loteria consiste no sorteio de três números distintos entre os 20 números inteiros de 1 a 20; a ordem deles não é levada em consideração. Ganha um prêmio de R\$100.000,00 o apostador que comprou o bilhete com os números sorteados. Não existem bilhetes com a mesma trinca de números. O ganho esperado do apostador que comprou um determinado bilhete é igual ao prêmio multiplicado pela probabilidade de ganho.

Quem apostou na trinca  $\{4, 7, 18\}$  tem um ganho esperado de aproximadamente

**A** R\$ 88,00**B** R\$ 89,00**C** R\$ 90,00**D** R\$ 91,00**E** R\$ 92,00

**08** As figuras abaixo representam dez cartões, distintos apenas pelos números neles escritos.

|                  |                      |                   |                      |                    |
|------------------|----------------------|-------------------|----------------------|--------------------|
| $\frac{99}{100}$ | $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | $2 \cos 60^\circ$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\pi$              |
| $\log 13$        | $-\frac{5}{3}$       | $\frac{3}{5}$     | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $ \cos 180^\circ $ |

Sorteando aleatoriamente um cartão, a probabilidade de ele conter um número maior do que 1 é

**A**  $\frac{1}{5}$ .**B**  $\frac{3}{10}$ .**C**  $\frac{2}{5}$ .**D**  $\frac{1}{2}$ .**E**  $\frac{3}{5}$ .



**09** Uma urna contém bolas verdes e azuis. Sabe-se que a probabilidade de se retirar uma bola azul é de  $\frac{6}{11}$ . A probabilidade de ser retirada, em uma única tentativa, uma bola verde é de

**A**  $\frac{1}{11}$

**B**  $\frac{2}{11}$

**C**  $\frac{4}{11}$

**D**  $\frac{5}{11}$

**10** Um estudante de Economia precisa escolher exatamente duas dentre três disciplinas eletivas, que são: econometria, microeconomia, macroeconomia. A probabilidade de ele escolher econometria é a mesma que a de ele escolher microeconomia, cada uma igual a 62,5%. A probabilidade de ele escolher econometria e microeconomia é de 25%.

Sendo assim, a probabilidade de esse estudante escolher macroeconomia é igual a

**A**  $\frac{3}{4}$

**B**  $\frac{18}{25}$

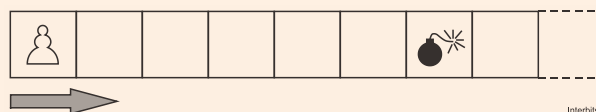
**C**  $\frac{2}{3}$

**D**  $\frac{5}{8}$

**E**  $\frac{3}{5}$

**11** Em um jogo de tabuleiro, o jogador desloca seu peão nas casas por meio dos pontos obtidos no lançamento de um par de dados convencionais e não viciados. Se o jogador obtém números diferentes nos dados, ele avança um total de casas igual à soma dos pontos obtidos nos dados, encerrando-se a jogada. Por outro lado, se o jogador obtém números iguais nos dados, ele lança novamente o par de dados e avança seu peão pela soma dos pontos obtidos nos dois lançamentos, encerrando-se a jogada.

A figura a seguir indica a posição do peão no tabuleiro desse jogo antes do início de uma jogada.



Iniciada a jogada, a probabilidade de que o peão encerre a jogada na casa indicada na figura com a bomba é igual a

**A**  $\frac{37}{324}$

**B**  $\frac{49}{432}$

**C**  $\frac{23}{144}$

**D**  $\frac{23}{135}$

**E**  $\frac{23}{216}$

**12** A tabela a seguir apresenta o número de casos notificados ou prováveis de dengue, chikungunya e Zika vírus, registrados nos estados do Sul do Brasil até a semana 23 do ano de 2016, conforme boletim epidemiológico do Ministério da Saúde.

| Estado            | Dengue | Zika  | Chikungunya |
|-------------------|--------|-------|-------------|
| Paraná            | 71.114 | 1.935 | 1.459       |
| Santa Catarina    | 5.344  | 360   | 324         |
| Rio Grande do Sul | 3.961  | 97    | 233         |

Escolheu-se aleatoriamente um paciente do Sul do Brasil registrado como um caso (notificado ou provável) de uma dessas doenças. Com relação ao paciente supracitado, de acordo com a tabela acima, assinale a afirmação que é INCORRETA.

**A** A probabilidade de ser um caso de chikungunya ou de ter sido no Paraná é maior que 90%.

**B** A probabilidade de que seja um caso do Rio Grande do Sul é menor que a probabilidade de ser um caso de dengue.

**C** A probabilidade de que não seja do Paraná é menor que 15%.

**D** A probabilidade de ser um caso de Zika ou de ter sido em Santa Catarina é menor que 10%.

**E** A probabilidade de ser um caso no Paraná ou de ser de dengue é maior que 98%.



**13** | A probabilidade de um casal ter um filho de olhos azuis é igual a  $\frac{1}{3}$ . Se o casal pretende ter

4 filhos, a probabilidade de que no máximo dois tenham olhos azuis é

**A**  $\frac{1}{9}$

**B**  $\frac{7}{9}$

**C**  $\frac{8}{9}$

**D**  $\frac{2}{3}$

**E**  $\frac{1}{2}$

**14** | A probabilidade de ocorrência do evento A é igual a  $\frac{3}{4}$ , e a de ocorrência do evento B é igual a  $\frac{2}{3}$ . Apenas com essas informações, e sendo p a probabilidade de ocorrência de A e B, pode-se afirmar que o menor intervalo ao qual p necessariamente pertence é

**A**  $\left[\frac{1}{12}, \frac{2}{3}\right]$

**B**  $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

**C**  $\left[\frac{1}{12}, \frac{1}{2}\right]$

**D**  $\left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right]$

**E**  $\left[\frac{5}{12}, \frac{2}{3}\right]$

**15** | Um dado não tendencioso de seis faces será lançado duas vezes. A probabilidade de que o maior valor obtido nos lançamentos seja menor do que 3 é igual a

**A**  $\frac{1}{3}$ .

**B**  $\frac{1}{5}$ .

**C**  $\frac{1}{7}$ .

**D**  $\frac{1}{9}$ .

**16** | Uma urna contém 18 bolas vermelhas, 12 amarelas e 20 brancas, sendo todas idênticas. Quantas bolas brancas devem ser retiradas dessa urna, de modo que, ao sortear uma bola, a probabilidade de ela ser branca seja igual a  $\frac{1}{6}$ ?

**A** 16

**B** 15

**C** 14

**D** 13

**E** 12

**17** | Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30 m de distância; o segundo, a 40 m; o terceiro alvo, a 60 m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a

probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de  $\frac{2}{3}$ , então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é

**A**  $\frac{120}{160}$ .

**B**  $\frac{119}{154}$ .

**C**  $\frac{110}{144}$ .

**D**  $\frac{105}{135}$ .

**E**  $\frac{119}{144}$ .

**18** | Um dado comum, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes, fornecendo dois números a e c, que podem ser iguais ou diferentes. Qual é a probabilidade de a equação  $ax^2 + 4x + c = 0$  ter pelo menos uma raiz real?

**A**  $\frac{5}{36}$ .

**B**  $\frac{1}{6}$ .

**C**  $\frac{2}{9}$ .

**D**  $\frac{4}{15}$ .

**E**  $\frac{1}{3}$ .



**19|** Uma prova consta de 7 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada uma, e apenas uma correta. Se um aluno escolher como correta uma alternativa ao acaso em cada questão, a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente:

- A** 87%.
- B** 85%.
- C** 90%.
- D** 47%.

**20|** Num auditório da Academia da Força Aérea estão presentes 20 alunos do Curso de Formação de Oficiais Aviadores dos quais apenas 10 usam agasalho. Estão presentes, também, 25 alunos do Curso de Formação de Oficiais Intendentes dos quais apenas 15 usam agasalho. Um dos alunos presentes é escolhido ao acaso.

É correto afirmar que é igual a  $\frac{2}{9}$  a probabilidade de que o aluno escolhido

- A** seja do Curso de Formação de Oficiais Intendentes ou use agasalho.
- B** use agasalho, sabendo que é do Curso de Formação de Oficiais Intendentes.
- C** seja do Curso de Formação de Oficiais Aviadores que não use agasalho.
- D** não use agasalho, sabendo que é do Curso de Formação de Oficiais Aviadores.

**21|** Uma seguradora vende um tipo de seguro empresarial contra certo evento raro. A probabilidade de ocorrência do referido evento em cada empresa, no prazo de um ano, é  $p$ ; a ocorrência do evento em uma empresa é independente da ocorrência do mesmo evento em outra. Há 10 empresas seguradas pagando cada uma R\$ 90.000,00 pelo seguro anual. Caso ocorra o evento raro em uma empresa em um ano, a seguradora deve pagar a ela R\$ 1.000.000,00.

A probabilidade da seguradora ter prejuízo nessa modalidade de seguro em um ano é:

- A**  $p^{10}$
- B**  $(1-p)^{10}$
- C**  $1-(1-p)^{10}$
- D**  $1-p^{10}$
- E**  $p^5(1-p)^5$

**22|** A equipe olímpica de Matemática da Escola Math é composta de três meninos e quatro meninas.

Para a próxima Olimpíada de Matemática, cada escola deverá enviar quatro representantes e, dada a homogeneidade intelectual de sua equipe, a Escola Math resolveu sortear entre os sete estudantes de sua equipe os quatro que a representarão.

Os quatro representantes serão sorteados um de cada vez, sem reposição.

A probabilidade de que nem todos os meninos estejam entre os quatro representantes é:

- A**  $\frac{2}{7}$
- B**  $\frac{3}{7}$
- C**  $\frac{11}{14}$
- D**  $\frac{25}{28}$
- E**  $\frac{31}{35}$

**23|** Considere um hexágono convexo com vértices A, B, C, D, E e F. Tomando dois vértices ao acaso, a probabilidade de eles serem extremos de uma diagonal do hexágono é

- A**  $\frac{1}{5}$ .
- B**  $\frac{2}{5}$ .
- C**  $\frac{3}{5}$ .
- D**  $\frac{4}{5}$ .
- E** 1.

**24|** Seis alunos da EFOMM – três paranaenses, dois cariocas e um alagoano – são colocados em uma fila aleatoriamente. Qual é a probabilidade, então, de que nenhum conterrâneo fique ao lado do outro?

- A**  $\frac{3}{31}$
- B**  $\frac{1}{36}$
- C**  $\frac{1}{24}$



**D**  $\frac{1}{12}$

**E**  $\frac{1}{6}$

**25** Uma fração, definida como a razão entre dois inteiros, chama-se imprópria quando o numerador é maior ou igual ao denominador e chama-se decimal quando o denominador é uma potência de dez.

Dois dados convencionais, de seis faces equiprováveis, possuem cores diferentes: um deles é branco, e o outro preto. Em um lançamento aleatório desses dois dados, o número obtido no dado branco será o numerador de uma fração, e o obtido no dado preto será o denominador.

A probabilidade de que a fração formada seja imprópria e equivalente a uma fração decimal é igual a

**A**  $\frac{17}{36}$

**B**  $\frac{1}{2}$

**C**  $\frac{19}{36}$

**D**  $\frac{5}{9}$

**E**  $\frac{7}{12}$

## GABARITO

**01** | **B**

Seja  $p$  a probabilidade pedida e supondo que os eventos são independentes, temos:

$$0,6 \cdot p = 0,7 \Rightarrow p \cong 86\%.$$

**02** | **A**

Fixando as duas mulheres, existem  $\binom{3}{1} = 3$  maneiras de escolher o último membro do grupo. Por outro lado, é possível escolher três pessoas quaisquer de

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ modos.}$$

A resposta é  $\frac{3}{10}$ .

**03** | **E**

[I] Falsa. A probabilidade citada é dada por

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

[II] Falsa. A probabilidade citada é

$$P = \frac{C_{4,2} + C_{2,2}}{C_{15,2}} = \frac{6+1}{105} = \frac{1}{15}.$$

[III] Falsa. A probabilidade pedida será dada por

$$P = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{8}{455}.$$

Portanto, todas as afirmações são falsas.

**04** | **A**

Seja  $\frac{x^2}{(x+5)^2}$ ,  $\frac{16}{(x+5)^2}$  e  $\frac{1}{(x+5)^2}$ , respectivamente, a probabilidade de retirar duas bolas vermelhas, duas bolas pretas e duas bolas brancas, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x+5)^2} + \frac{16}{(x+5)^2} + \frac{1}{(x+5)^2} &= \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 34 = x^2 + 10x + 25 \\ &\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \\ &\Rightarrow x = 9. \end{aligned}$$

**05** | **B**

Considere que a prova tenha 100 questões, 68% de acerto então, representa 68 questões. Cada questão tem a probabilidade de acerto de 25% (ou  $\frac{1}{4}$ ) e de erro de 75% (ou  $\frac{3}{4}$ ). Se o candidato já acertou 68 questões, restaram 32 questões onde a probabilidade de acerto de  $\frac{1}{4}$  cada uma. Assim:

$$32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ questões}$$

Como o candidato já acertou 68 questões, com mais 8 ele terá acertado 76 questões de um total de 100, ou seja 76%.

**06** | **B**

A probabilidade de nenhum dos dois cartões ter número par será igual a:

$$P(x') = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$$

Assim a probabilidade complementar, ou seja, a probabilidade de pelo menos um cartão ter número par será de:



$$1 - P(x') = 1 - \frac{5}{12} \rightarrow P(x) = \frac{7}{12}$$

**07 | A**

Calculando:

$$C_{20,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$$

$$P(4,7,18) = \frac{1}{C_{20,3}} = \frac{1}{1140}$$

$$\text{Ganho} = 100000 \cdot \frac{1}{1140} = 87,72 \approx 88 \text{ reais}$$

**08 | B**

Das cartas acima temos apenas três com números maiores que 1. Observe o esquema.

|                                                   |                             |                        |                              |                         |
|---------------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------------|-------------------------|
| $\frac{99}{100}$<br>0,99                          | $\frac{\sqrt{5}}{2}$<br>1,1 | $2 \cos 60^\circ$<br>1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$<br>0,57 | $\pi$<br>3,14           |
| $\log 13$<br>$\log 13 > \log 10$<br>$\log 13 > 1$ | $-\frac{5}{3}$<br>negativo  | $\frac{3}{5}$<br>0,6   | $\frac{1}{\sqrt{2}}$<br>0,7  | $ \cos 180^\circ $<br>1 |

Portanto, a probabilidade pedida será:  $P = \frac{3}{10}$ .

**09 | D**

Havendo apenas bolas verdes e azuis na urna, segue

que a resposta é dada por  $1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$ .

**10 | A**

Suponhamos que o estudante escolherá necessariamente duas dentre três disciplinas. Daí, sabendo que a probabilidade de ele escolher econometria e microeconomia é de 0,25, podemos concluir que a

resposta é  $1 - 0,25 = 0,75 = \frac{3}{4}$ .

**11 | A**

Lançando os dados uma única vez, os casos favoráveis são (1, 5), (2, 4), (4, 2) e (5, 1). Logo, como o espaço amostral possui  $6 \cdot 6 = 36$  elementos, segue que a probabilidade de encerrar na casa desejada com apenas um lançamento é  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ .

Por outro lado, também é possível encerrar na casa desejada obtendo-se (1, 1) no primeiro lançamento e qualquer um dos resultados (1, 3), (2, 2) ou (3, 1) no segundo e último lançamento. Essa probabilidade é igual a  $\frac{1}{36} \cdot \frac{3}{36}$ .

A última possibilidade consiste em obter (2, 2) no primeiro lançamento e (1, 1) no segundo e último lançamento. Isso ocorre com probabilidade igual a  $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}$ .

Portanto, o resultado é  $\frac{1}{9} + \frac{3}{36^2} + \frac{1}{36^2} = \frac{37}{324}$ .

**12 | A**

Considere a tabela.

| Estado               | Den-<br>gue | Zika  | Chikun-<br>gunya | Total  |
|----------------------|-------------|-------|------------------|--------|
| Paraná               | 71.114      | 1.935 | 1.459            | 74.508 |
| Santa Cata-<br>rina  | 5.344       | 360   | 324              | 6.028  |
| Rio Grande<br>do Sul | 3.961       | 97    | 233              | 4.291  |
| Total                | 80.419      | 2.392 | 2.016            | 84.827 |

[A] Falsa. Tem-se, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, que a probabilidade de ser um caso de chikungunya ou de ter sido no Paraná é dada por

$$\frac{2016}{84827} + \frac{74508}{84827} - \frac{1459}{84827} \approx 88,49\%.$$

[B] Verdadeira. De fato, pois  $\frac{4291}{84827} < \frac{80419}{84827}$ .

[C] Verdadeira. Com efeito, pois  $1 - \frac{74508}{84827} \approx 12,16\%$ .

[D] Verdadeira. De fato, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, segue que

$$\frac{2392}{84827} + \frac{6028}{84827} - \frac{360}{84827} \approx 9,50\%.$$

[E] Verdadeira. Com efeito, novamente pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$\frac{74508}{84827} + \frac{80419}{84827} - \frac{71114}{84827} \approx 98,80\%.$$

**13| C**

Probabilidade do casal não ter filhos com os olhos

$$\text{azuis: } \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

Probabilidade do casal ter apenas um filho com os

$$\text{olhos azuis: } \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

Probabilidade do casal ter exatamente dois filhos

$$\text{com os olhos azuis: } \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} + \frac{24}{81} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}.$$

**14| E**

Supondo A e B eventos de um mesmo espaço amostral e sabendo que  $p = P(A \cap B)$ , pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, vem

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow p = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - P(A \cup B) \\ &\Leftrightarrow p = \frac{17}{12} - P(A \cup B). \end{aligned}$$

Portanto, é fácil ver que p será mínima se  $P(A \cup B) = 1$ . Nesse caso, temos  $p = \frac{5}{12}$ . Ademais, como  $P(B) < P(A)$ , se B estiver contido em A, então  $A \cup B = A$  e, assim, vem  $P(A \cup B) = P(A)$ , implicando em  $p = \frac{2}{3}$ , valor máximo de p.

Em consequência, a resposta é  $p \in \left[\frac{5}{12}, \frac{2}{3}\right]$ .

**15| D**

Ao se lançar um dado duas vezes há 36 possíveis resultados. Destes, apenas 4 podem ter o maior valor menor do que 3 (1 e 1, 1 e 2, 2 e 1 e 2 e 2). Assim,

$$\text{a probabilidade será igual a } \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

**16| C**

Admitindo que x seja a quantidade de bolas brancas que serão retiradas, temos:

$$\frac{20-x}{50-x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 50-x = 120-6x \Rightarrow 5x = 70 \Rightarrow x = 14$$

**17| E**

Calculando:

$$\left. \begin{aligned} P(A) &= \frac{k}{30^2} \\ P(B) &= \frac{k}{40^2} \\ P(C) &= \frac{k}{60^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(A) \cdot 30^2 = P(B) \cdot 40^2 = P(C) \cdot 60^2 = k$$

$$P(A) = \frac{2}{3} = \frac{k}{30^2} \Rightarrow k = 600 \Rightarrow \begin{cases} P(B) = \frac{3}{8} \\ P(C) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) = \frac{1}{3} \\ P(\bar{B}) &= 1 - P(B) = \frac{5}{8} \\ P(\bar{C}) &= 1 - P(C) = \frac{5}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{\text{errar todos}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{144}$$

$$P_{\text{acertar}} = 1 - P_{\text{errar todos}} = 1 - \frac{25}{144} = \frac{119}{144}$$

**18| C**

É fácil ver que o número de resultados possíveis do lançamento do dado duas vezes é  $6 \cdot 6 = 36$ . Ademais, para que a equação tenha pelo menos uma raiz, é necessário que seu discriminante seja maior do que ou igual a zero, ou seja,

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow ac \leq 4.$$

Logo, os resultados favoráveis são (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1) e (4, 1).

Em consequência, a probabilidade pedida é  $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ .

**19| A**

A probabilidade de ele acertar ao menos uma questão da prova é igual a probabilidade total (100%) menos a probabilidade de ele errar todas as questões. Cada questão tem a probabilidade de acerto de 25% (ou  $1/4$ ) e de erro de 75% (ou  $3/4$ ). Assim, a probabilidade de errar todas as questões seria:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^7 = \frac{2187}{16384} = 0,133 \approx 13\%$$

E a probabilidade de que ele acerte ao menos uma questão da prova é de, aproximadamente:





$$100\% - 13\% = 87\%$$

**20 | C**

De acordo com o enunciado:

|                          | Sem agasalho (SA) | Com agasalho (CA) | Total |
|--------------------------|-------------------|-------------------|-------|
| Oficiais Aviadores (x)   | 10                | 10                | 20    |
| Oficiais Intendentes (y) | 10                | 15                | 25    |
| Total                    | 20                | 25                | 45    |

Analisando as alternativas uma a uma:

$$[A] P(y \cup CA) = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

$$[B] P(y / CA) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$[C] P(x \cap SA) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$[D] P(SA / x) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

**21 | C**

Para que a seguradora não tenha prejuízo não deve ocorrer nenhum evento (um único evento já gera prejuízo pois a seguradora recebe anualmente R\$ 900.000,00 e a cada evento deve pagar R\$ 1.000.000,00). Assim, pode-se escrever:

$X$  = não ocorrer em 10 empresas

$$P(X) = (1-p)^{10}$$

$\bar{X}$  = ocorrer em ao menos 1

$$P(\bar{X}) = 1 - (1-p)^{10}$$

**22 | E**

Sendo o evento A o evento em que nem todos os meninos são escolhidos e o evento B o evento em que todos os meninos são escolhidos, pode-se escrever:

$$\text{Universo} \Rightarrow C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

$$P(A) = 1 - P(B)$$

$$P(B) = \frac{4}{35} \quad (4 \text{ meninas})$$

$$P(A) = 1 - \frac{4}{35} \Rightarrow P(A) = \frac{31}{35}$$

**23 | C**

Número de diagonais de um hexágono:

$$d = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$$

Número de maneiras distintas de se escolher dois dos vértices do hexágono:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$$

Portanto, a probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

**24 | E**

Temos ao todo 10 formações possíveis para a sequência, considerando que P seja um aluno paranaense, C seja um aluno carioca e A seja o aluno alagoano, temos:

PCPAPC

PCPACP

PCPCPA

PCPCAP

PCAPCP

PACPCC

PAPCPC

CPCPAP

CPAPCP

APCPCP

Para cada uma dessas sequências possíveis temos  $3! \cdot 2 \cdot 1 = 12$  possibilidades, ou seja,  $12 \cdot 10 = 120$  filhas possíveis.

Logo a probabilidade pedida será dada por:

$$P = \frac{120}{6!} = \frac{1}{6}$$

**25 | C**

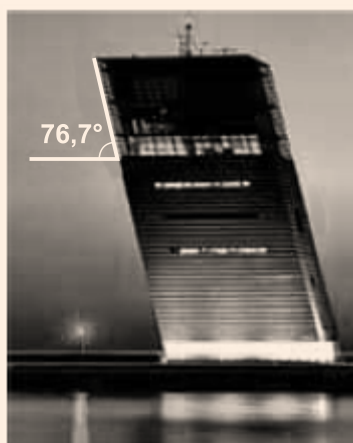
É imediato que existem  $6 \cdot 6 = 36$  resultados possíveis. Dentre esses resultados, não são favoráveis:

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 3) e (5, 6).

Portanto, segue que a resposta é  $1 - \frac{17}{36} = \frac{19}{36}$ .

# TRIGONOMETRIA

**01** A torre de controle de tráfego marítimo de Algés, em Portugal, tem o formato de um prisma oblíquo, com base retangular de área  $247 \text{ m}^2$ . A inclinação da torre é de aproximadamente  $76,7^\circ$ , com deslocamento horizontal de  $9 \text{ m}$  da base superior em relação à base inferior do prisma.

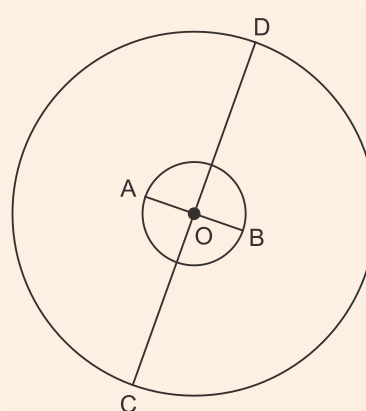


| Dados:       |               |               |                     |
|--------------|---------------|---------------|---------------------|
| $\alpha$     | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\text{tg } \alpha$ |
| $13,3^\circ$ | 0,23          | 0,97          | 0,24                |

Nas condições descritas, o volume do prisma que representa essa torre, aproximado na casa da centena, é igual a

- A**  $9.300 \text{ m}^3$ .
- B**  $8.900 \text{ m}^3$ .
- C**  $8.300 \text{ m}^3$ .
- D**  $4.600 \text{ m}^3$ .
- E**  $4.200 \text{ m}^3$ .

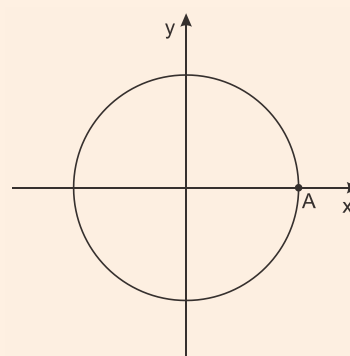
**02** Considere dois círculos concêntricos em um ponto  $O$  e de raios distintos; dois segmentos de reta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  perpendiculares em  $O$ , como na figura abaixo.



Sabendo que o ângulo  $\widehat{ADB}$  mede  $30^\circ$  e que o segmento  $\overline{AD}$  mede  $12$ , pode-se afirmar que os diâmetros dos círculos medem

- A**  $12 \sin 15^\circ$  e  $12 \cos 15^\circ$ .
- B**  $12 \sin 75^\circ$  e  $24 \cos 75^\circ$ .
- C**  $12 \sin 75^\circ$  e  $24 \sin 75^\circ$ .
- D**  $24 \sin 15^\circ$  e  $24 \cos 15^\circ$ .
- E**  $24 \sin 75^\circ$  e  $12 \cos 75^\circ$ .

**03**





O círculo, na figura, representa, no sistema de coordenadas cartesianas, uma pista onde uma pessoa P costuma correr, visando os benefícios à saúde que essa prática traz.

Um determinado dia, P parte do ponto representado por  $A = (120, 0)$ , de onde começa a correr no sentido anti-horário, mantendo uma velocidade de 4 metros por segundo.

Considerando-se  $\pi = 3$ , pode-se afirmar que após 32 minutos de corrida P estará no ponto de coordenadas  $x$  e  $y$ , tais que

**A**  $y = -\sqrt{3} x$

**B**  $y = -\sqrt{2} x$

**C**  $y = \sqrt{2} x$

**D**  $y = \sqrt{3} x$

**E**  $y = 2\sqrt{3} x$

**04** | Seja  $\sin(x) + \cos(x) = a$  e  $\cos(x)\sin(x) = b$ . Podemos então afirmar que

**A**  $a + b = 1$

**B**  $a^2 + b = 1$

**C**  $a + b^2 = 1$

**D**  $a^2 - 2b = 1$

**E**  $a^2 + 2b = 1$

**05** | Se a função trigonométrica  $y = a + b\sin(px)$  tem imagem  $I = [1, 5]$  e período  $\frac{3}{\delta}$ , qual é o valor da soma  $a + b + p$ ? Adote  $\delta = 3$ .

**A** 5

**B** 6

**C** 8

**D** 10

**E** 11

**06** | A pressão arterial é a pressão que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo (pressão sistólica) quando os ventrículos se contraem, e o valor mínimo (pressão diastólica) quando eles estão em repouso. Suponhamos que a variação da pressão arterial (em mmHg) de um cidadão portoalegrense em função do tempo (em segun-

dos) é dada por  $P(t) = 100 - 20 \cdot \cos\left(\frac{8\delta}{3} \cdot t\right)$ . Diante disso, os valores da pressão diastólica e sistólica, em mmHg, são iguais, respectivamente, a

**A** 60 e 100

**B** 60 e 120

**C** 80 e 120

**D** 80 e 130

**E** 90 e 120

**07** | Assinale a alternativa correta:

**A** A equação  $\cos x = \frac{1}{2}$  tem duas raízes no intervalo  $[0; \delta]$ .

**B**  $\sin x + \cos x \geq 1$  para todo  $x$  pertencente ao intervalo  $\left[0; \frac{\delta}{2}\right]$ .

**C**  $\sin(120^\circ) = \frac{1}{2}$ .

**D** O número de diagonais de um heptágono regular (polígono de 7 lados) é 12.

**E** Duplicando-se o raio de uma esfera, seu volume quadruplica.

**08** | Seja  $M = \frac{\cos \sec x + \sec x}{\cot x + 1}$ , com  $x \neq \frac{k\delta}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar  $M$  igual a

**A**  $\sin x$

**B**  $\cos x$

**C**  $\sec x$

**D**  $\cos \sec x$

**09** | Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio  $R$ . Se esse triângulo tem um ângulo medindo  $30^\circ$ , seu lado oposto a esse ângulo mede

**A**  $\frac{R}{2}$

**B**  $R$

**C**  $2R$ **D**  $\frac{2R}{3}$ 

**10** | João está procurando cercar um terreno triangular que ele comprou no campo. Ele sabe que dois lados desse terreno medem, respectivamente, 10 m e 6 m e formam entre si um ângulo de  $120^\circ$ . O terreno será cercado com três voltas de arame farpado. Se o preço do metro do arame custa R\$ 5,00, qual será o valor gasto por João com a compra do arame?

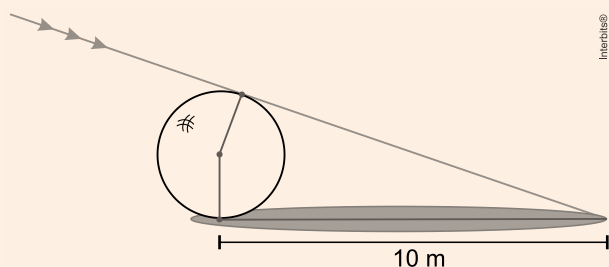
Dados:

$$\text{sen de } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos de } 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

**A** R\$ 300,00**B** R\$ 420,00**C** R\$ 450,00**D** R\$ 500,00**E** R\$ 520,00

**11** | Uma esfera de raio  $r$  está apoiada sobre o chão plano em um dia iluminado pelo sol. Em determinado horário, a sombra projetada à direita do ponto onde a esfera toca o chão tinha comprimento de 10 m, como indica a figura.



Nesse mesmo horário, a sombra projetada por uma vareta reta de 1 m, fincada perpendicularmente ao chão, tinha 2 m de comprimento. Assumindo o paralelismo dos raios solares, o raio da esfera, em metros, é igual a

**A**  $5\sqrt{5} - 10$ .**B**  $10\sqrt{5} - 20$ .**C**  $5\sqrt{5} - 5$ .**D**  $5\sqrt{5} - 2$ .**E**  $10\sqrt{5} - 10$ .

**12** | A inequação  $\text{sen}(x)\cos(x) \leq 0$ , no intervalo de  $0 \leq x \leq 2\delta$  e  $x$  real, possui conjunto solução

**A**  $\frac{\delta}{2} \leq x \leq \delta$  ou  $\frac{3\delta}{2} \leq x \leq 2\delta$ **B**  $0 \leq x \leq \frac{\delta}{2}$  ou  $\delta \leq x \leq \frac{3\delta}{2}$ **C**  $\frac{\delta}{4} \leq x \leq \frac{3\delta}{4}$  ou  $\frac{5\delta}{4} \leq x \leq \frac{7\delta}{4}$ **D**  $\frac{3\delta}{4} \leq x \leq \frac{5\delta}{4}$  ou  $\frac{7\delta}{4} \leq x \leq 2\delta$ **E**  $0 \leq x \leq \frac{\delta}{3}$  ou  $\frac{2\delta}{3} \leq x \leq \delta$ 

**13** | O número de soluções da equação  $(1 + \sec \epsilon)(1 + \cos \sec \epsilon) = 0$ , com  $\epsilon \in [-\delta, \delta]$ , é

**A** 0.**B** 1.**C** 2.**D** 3.**E** 4.

**14** | A soma das soluções da equação  $\cos(2x) - \cos(x) = 0$ , com  $x \in [0, 2\delta)$ , é igual a

**A**  $\frac{5\delta}{3}$ **B**  $2\delta$ **C**  $\frac{7\delta}{3}$ **D**  $\pi$ **E**  $\frac{8\delta}{3}$ 

**15** | A única solução da equação  $\text{sen } 2x \cdot \text{sen } 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$  com  $0^\circ \leq x < 90^\circ$ , é

**A**  $72^\circ$ .**B**  $36^\circ$ .**C**  $24^\circ$ .**D**  $18^\circ$ .**E**  $15^\circ$ .

**GABARITO****01| A**

Seja  $h$  a altura do prisma. Logo, sabendo que

$$\operatorname{tg} 76,7^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 13,3^\circ}, \text{ temos}$$

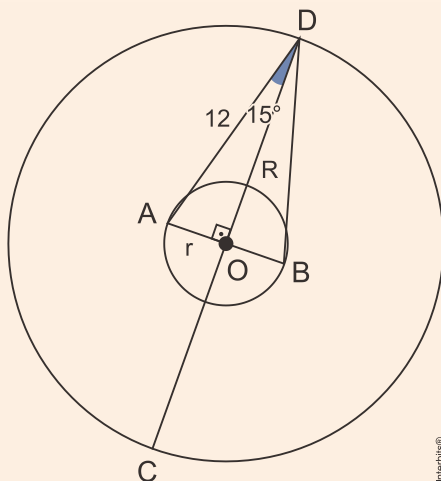
$$\operatorname{tg} 76,7^\circ = \frac{h}{9} \Rightarrow h \cong \frac{9}{0,24} \\ \Rightarrow h \cong 37,5 \text{ m.}$$

Por conseguinte, a resposta é  $247 \cdot 37,5 \cong 9.300 \text{ m}^2$ .

**02| D**

Sendo  $r$  e  $R$  as medidas dos raios menor e maior, respectivamente, temos:

$\triangle ADO$  é congruente ao  $\triangle BDO$ , portanto  $\hat{ADO} = \hat{BDO} = 15^\circ$ .



No triângulo  $ADO$ , temos:

$$\cos 15^\circ = \frac{R}{12} \Rightarrow R = 12 \cdot \cos 15^\circ \Rightarrow 2R = 24 \cdot \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{r}{12} \Rightarrow r = 12 \cdot \sin 15^\circ \Rightarrow 2r = 24 \cdot \sin 15^\circ$$

**03| D**

Calculando a distância ( $d$ ) percorrida pela pessoa (P).

$$d = 4 \cdot 32 \cdot 60 = 7.680 \text{ m}$$

Comprimento da pista (1 volta)

$$2 \cdot \pi \cdot 120 = 2 \cdot 3 \cdot 120 = 720 \text{ m}$$

Sabendo que:

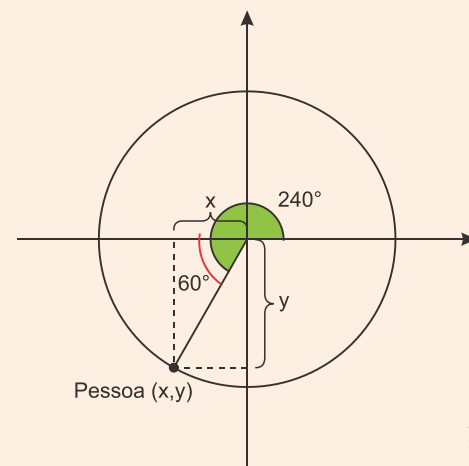
$$7680 \text{ m} = (720 \cdot 10 + 480) \text{ m}$$

Concluimos que foram dadas 10 voltas na pista mais 480 m. Determinando quando mede, em graus, um arco de 480 na pista circular de raio 120 m.

$$720 \text{ m} \text{ ————— } 360^\circ$$

$$480 \text{ m} \text{ ————— } x$$

Resolvendo a regra de três acima, concluimos que  $x = 240^\circ$ . Ou seja a pessoa 10 voltas completas na pista e ainda percorre um arco de  $240^\circ$ , como nos mostra a figura abaixo.



Como as coordenadas do ponto  $(x, y)$  possuem o mesmo sinal, podemos escrever que:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3} \cdot x$$

**04| D**

$$\text{De } \operatorname{sen}(x) + \cos(x) = a,$$

$$[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)]^2 = a^2$$

$$\operatorname{sen}^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = a^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}_1 + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = a^2$$

$$1 + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = a^2$$

Mas,  $\cos(x)\operatorname{sen}(x) = b$ , ou seja,



$$1 + 2\sin(x)\cos(x) = a^2$$

$$1 + 2\underbrace{\cos(x)\sin(x)}_b = a^2$$

$$1 + 2b = a^2$$

$$a^2 - 2b = 1$$

**05 | E**

Considerando  $a, b$  e  $p$  números positivos, podemos escrever que:

$$\sin x = 1 \Rightarrow a + b \cdot 1 = 5 \Rightarrow a + b = 5$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow a + b \cdot (-1) = 1 \Rightarrow a - b = 1$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 2$$

Lembrando que  $p > 0$ , o período da função será dado por:

$$\frac{2\delta}{p} = \frac{3}{\delta} \text{ (considerando } \delta = 3)$$

$$3p = 18$$

$$p = 6$$

Logo,  $a + b + p = 3 + 2 + 6 = 11$ .

**06 | C**

Sabendo que o valor máximo de  $\cos\left(\frac{8\delta}{3} \cdot t\right)$  é 1, podemos concluir que o valor da pressão diastólica é  $100 - 20 = 80 \text{ mmHg}$ .

Por outro lado, sendo  $-1$  o valor mínimo de  $\cos\left(\frac{8\delta}{3} \cdot t\right)$ , segue que o valor da pressão sistólica é  $100 - 20 \cdot (-1) = 120 \text{ mmHg}$ .

**07 | B**

Analisando as alternativas uma a uma:

[A] FALSA. Tem uma única raiz. Calculando:

$$\cos x = \frac{1}{2}, [0; \delta] \Rightarrow x = \frac{\delta}{3}$$

[B] VERDADEIRA. Nos extremos:

$$\text{se } \begin{cases} x = 0 \\ x = \delta/2 \end{cases} \Rightarrow \sin x + \cos x = 0 + 1 = 1$$

Num triângulo ABC, reto em A, situado no primeiro quadrante de um círculo trigonométrico de centro C:

$$\triangle ABC \Rightarrow CA + AB > CB \Rightarrow \text{no círculo trigonométrico} \Rightarrow \sin x + \cos x > 1$$

[C] FALSA. Pois:

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[D] FALSA. Calculando:

$$d = \frac{7 \cdot (7 - 3)}{2} = 14$$

[E] FALSA. Calculando:

$$V = \frac{4\delta R^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{4\delta(2R)^3}{3} = \frac{8 \cdot 4\delta R^3}{3} \Rightarrow V' = 8V$$

**08 | ANULADA**

Questão anulada no gabarito oficial.

$$\text{Desde que } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e}$$

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ temos}$$

$$M = \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\cotg x + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\sin x}}$$

$$= \sec x.$$

**Observação:** Para  $x = \left(\frac{4k+3}{4}\right)\delta$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , a expressão não está definida.

**09 | B**

Seja  $\ell$  a medida do lado do triângulo que é oposto ao ângulo de  $30^\circ$ . Pela Lei dos Senos, tem-se que



$$\frac{\ell}{\sin 30^\circ} = 2R \Leftrightarrow \ell = R.$$

**10| C**

Pela lei dos cossenos:

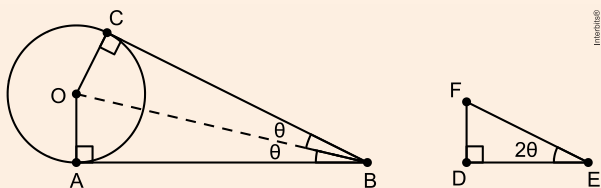
$$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = 136 - 120 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a^2 = 196 \Rightarrow a = 14$$

$$\text{Perímetro} = 10 + 6 + 14 = 30 \text{ m}$$

$$3 \text{ voltas} = 90 \text{ m} \Rightarrow \text{custo} = 5 \cdot 90 = 450 \text{ reais}$$

**11| B**

Considere a figura, em que  $\overline{AO} = \overline{OC} = r$  é a medida do raio da esfera e  $\widehat{ABC} = 2\theta$ .



Sendo  $\overline{AB} = 10 \text{ m}$ , temos

$$\operatorname{tg} \widehat{ABO} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{r}{10}.$$

Por outro lado, como  $BC \parallel EF$ ,  $\overline{DF} = 1 \text{ m}$  e  $\overline{DE} = 2 \text{ m}$ , vem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \widehat{DEF} &= \frac{\overline{DF}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\theta = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \cdot \frac{r}{10}}{1 - \left(\frac{r}{10}\right)^2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow r^2 + 40r - 100 = 0 \\ &\Rightarrow r = (10\sqrt{5} - 20) \text{ m}. \end{aligned}$$

**12| A**

Tem-se que

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin 2x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \theta + 2k\theta \leq 2x \leq 2\theta + 2k\theta \\ &\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} + k\theta \leq x \leq \theta + k\theta, \end{aligned}$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Assim, como para  $k = 0$  vem  $\frac{\theta}{2} \leq x \leq \theta$ , e para  $k = 1$

temos  $\frac{3\theta}{2} \leq x \leq 2\theta$ , segue que o conjunto solução da inequação no intervalo  $[0, 2\theta]$  é

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\theta}{2} \leq x \leq \theta \text{ ou } \frac{3\theta}{2} \leq x \leq 2\theta \right\}.$$

**13| A**

Calculando:

$$(1 + \sec \theta) \cdot (1 + \cos \sec \theta) = 0$$

$$\text{Condições de existência} \rightarrow \begin{cases} \sin \theta \neq 0 \\ \cos \theta \neq 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\theta \neq \frac{\theta}{2}; \theta \neq k\theta$$

Mas:

$$\begin{cases} \sec \theta = -1 \rightarrow \cos \theta = -1 \rightarrow \theta = \theta \\ \text{ou} \\ \cos \sec \theta = -1 \rightarrow \sin \theta = -1 \rightarrow \theta = -\frac{\theta}{2} + 2k\theta \end{cases}$$

Assim,  $S = \emptyset$ .

**14| B**

$$\cos(2x) - \cos(x) = 0$$

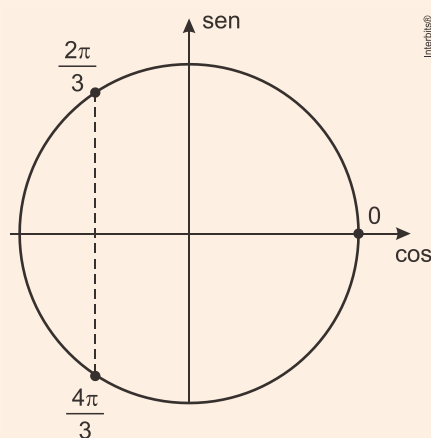
$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\cos x = 1 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2}$$



Logo,

$$x = \frac{2\theta}{3} \text{ ou } x = \frac{4\theta}{3} \text{ ou } x = 0.$$





Portanto, a soma das raízes da equação será dada por:

$$\frac{2\delta}{3} + \frac{4\delta}{3} + 0 = 2\delta$$

**15 | D**

Lembrando que  $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ , temos

$$\begin{aligned}\sin 2x \cdot \sin 3x &= \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x = \pm 90^\circ + 360^\circ \cdot k \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 18^\circ + 72^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -18^\circ + 72^\circ \cdot k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.\end{aligned}$$

Portanto, da primeira equação vem  $x = 18^\circ$ , para  $k = 0$ , e da segunda vem  $x = 54^\circ$ , para  $k = 1$ .

## POLINÔMIOS

## POLINÔMIOS

## POTENCIAÇÃO

## SISTEMAS LINEARES

**01** Cinco jovens, que representaremos por  $a, b, c, d, e$ , foram a um restaurante e observaram que o consumo de cada um obedecia ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + d = 20 \\ b + c - e = 30 \\ a - c = 15 \\ e - a = 10 \\ c + e = 25 \end{cases}$$

O total da conta nesse restaurante foi de

- A** R\$ 50,00
- B** R\$ 80,00
- C** R\$ 100,00
- D** R\$ 120,00
- E** R\$ 135,00

**02** Num restaurante, uma torta de legumes pesa 250 gramas, o que equivale a 500 calorias, e a porção de carne tem 240 gramas e contém 600 calorias. Uma pessoa com restrição alimentar compra uma torta e uma porção de carne, mas ela sabe que pode ingerir no máximo 824 calorias.

Considerando que  $x$  e  $y$  representam, respectivamente, em gramas, a quantidade de torta e de carne que ela pode ingerir, então, se essa pessoa consumir entre 180 gramas e 220 gramas de carne, ela só poderá comer uma quantidade de torta entre:

- A** 127 g e 197 g.
- B** 138 g e 188 g.
- C** 137 g e 187 g.
- D** 147 g e 177 g.

**03** Chama-se solução trivial de um sistema linear aquela em que todos os valores das incógnitas são nulos.

O sistema linear, nas incógnitas  $x, y$  e  $z$ :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \\ -5x + y + mz = 0 \end{cases}$$

- A** é impossível para qualquer valor de  $m$ .
- B** admite apenas a solução trivial para qualquer valor de  $m$ .
- C** admite soluções diferentes da solução trivial para  $m = 13$ .
- D** admite soluções diferentes da solução trivial para  $m = 10$ .
- E** não admite a solução trivial para  $m \neq 13$ .

**04** Sobre o sistema de equações lineares  $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 3x + \beta y = 7 \end{cases}$ , é CORRETO afirmar que

- A** possui uma única solução, qualquer que seja  $\beta$ .
- B** possui infinitas soluções, qualquer que seja  $\beta$ .
- C** possui ao menos uma solução, qualquer que seja  $\beta$ .
- D** só tem solução se  $\beta = 5$ .
- E** é impossível se  $\beta \neq -5$ .

**05** Considere o sistema  $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = 6 \\ \frac{x}{y} + \frac{z}{x} = \frac{5}{2} \\ \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{9}{2} \end{cases}$  onde  $x, y$  e  $z$  são reais não nulos.



O valor da expressão  $\frac{x^2z + y^2x + z^2y}{xyz}$  é:

- A**  $\frac{15}{2}$
- B**  $\frac{17}{2}$
- C**  $\frac{15}{4}$
- D**  $\frac{13}{2}$
- E**  $\frac{17}{4}$

**06** Sobre um sistema:  $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$  com  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , é CORRETO afirmar que:

- A** Se  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$  e  $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$ , o sistema possui uma única solução.
- B** Se  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$  e  $\frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}$ , o sistema não possui solução.
- C** Se  $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$ , o sistema possui infinitas soluções.
- D** Se  $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$  e  $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$ , o sistema não possui solução.
- E** Se  $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$ , sistema não possui solução.

**07** Considere o sistema de equações

$$S \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{27}{y^2} + \frac{8}{z^3} = 3 \\ \frac{4}{x} + \frac{81}{y^2} + \frac{40}{z^3} = 10 \\ \frac{2}{x} + \frac{54}{y^2} + \frac{24}{z^3} = 7 \end{cases}$$

Se  $(x, y, z)$  é uma solução real de  $S$ , então  $|x| + |y| + |z|$  é igual a

- A** 0.
- B** 3.
- C** 6.
- D** 9.
- E** 12.

**08** Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se  $b \neq -12$ , o sistema linear terá uma única solução.

II. Se  $a = b = -12$ , o sistema linear terá infinitas soluções.

III. Se  $b = -12$ , o sistema será impossível.

- A** Todas as afirmativas são corretas.
- B** Todas as afirmativas são incorretas.
- C** Somente as afirmativas I e III são corretas.
- D** Somente as afirmativas I e II são corretas.
- E** Somente as afirmativas II e III são corretas.

**09** Sejam  $a$  e  $b$  números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\begin{cases} x - y = a, \\ z - y = 1, \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = b. \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, podemos afirmar corretamente que

- A**  $a - b = 0$ .
- B**  $a + b = 1$ .
- C**  $a - b = 2$ .
- D**  $a + b = 3$ .

**10** Considere o sistema linear homogêneo

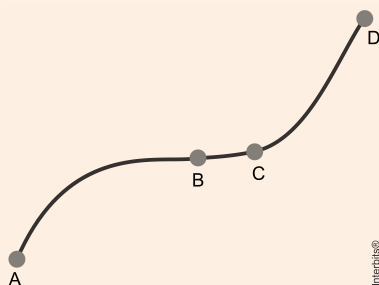
$$\begin{cases} x - 3y + kz = 0 \\ 3x + ky + z = 0, \text{ onde } k \text{ é um número real.} \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

O único valor que torna o sistema, acima, possível e indeterminado, pertence ao intervalo

- A**  $(-4, -2]$
- B**  $(-2, 1]$
- C**  $(1, 2]$
- D**  $(2, 4]$
- E**  $(4, 6]$



**11** As cidades A, B, C e D estão ligadas por uma rodovia, como mostra a figura seguinte, feita fora de escala.



Por essa rodovia, a distância entre A e C é o triplo da distância entre C e D, a distância entre B e D é a metade da distância entre A e B, e a distância entre B e C é igual a 5 km. Por essa estrada, se a distância entre C e D corresponde a  $x\%$  da distância entre A e B, então  $x$  é igual a

- A** 36.
- B** 36,5.
- C** 37.
- D** 37,5.
- E** 38.

**12** Márcia e Marta juntas “pesam” 115 kg; Marta e Mônica “pesam” juntas 113 kg; e Márcia e Mônica “pesam” juntas 108 kg. Qual é a soma dos “pesos” de Márcia, Marta e Mônica?

- A** 205 kg
- B** 195 kg
- C** 187 kg
- D** 175 kg
- E** 168 kg

**13** Na Escola de Marinha Mercante, há alunos de ambos os sexos (130 mulheres e 370 homens), divididos entre os Cursos Básico, de Máquinas e de Náutica. Sabe-se que do total de 130 alunos do Curso de Máquinas, 20 são mulheres. O Curso de Náutica tem 270 alunos no total e o Curso Básico tem o mesmo número de homens e mulheres. Quantas mulheres há no Curso de Náutica?

- A** 50
- B** 55
- C** 60
- D** 65
- E** 70

**14** O produto dos valores dos números reais  $\lambda$  para os quais a igualdade entre pontos do  $\mathbb{R}^2$ ,  $(2x+y, x-y) = (\lambda x, \lambda y)$  ocorre para algum  $(x, y) \neq (0, 0)$  é igual a

- A** -2.
- B** -3.
- C** -4.
- D** -5.

**15** Considere o polinômio  $p(x) = x^n + x^m + 1$ , em que  $n > m \geq 1$ . Se o resto da divisão de  $p(x)$  por  $x+1$  é igual a 3, então

- A**  $n$  é par e  $m$  é par.
- B**  $n$  é ímpar e  $m$  é ímpar.
- C**  $n$  é par e  $m$  é ímpar.
- D**  $n$  é ímpar e  $m$  é par.

**16** Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  números complexos que satisfazem ao sistema de equações abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

O valor da soma  $x^3 + y^3 + z^3$  é:

- A** 210
- B** 235
- C** 250
- D** 320
- E** 325

**17** O polinômio  $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 12$  é tal que  $P(x) = 0$  admite as raízes  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ .

Se  $x_1 \cdot x_2 = -3$  e  $x_2 + x_3 = 5$ , então é correto afirmar que

- A**  $P(m) = 0$
- B**  $m - n = -13$
- C**  $m \cdot n = 20$
- D**  $n - 2m = -7$



**18** Considere  $P(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$ , tal que  $P(1) = -2$  e  $P(2) = 6$ . Assim, os valores de  $b$  e  $c$  são, respectivamente,

- A** 1 e 2
- B** 1 e -2
- C** -1 e 3
- D** -1 e -3

**19** O termo independente de  $x$  no desenvolvimento da expressão algébrica  $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$  é

- A** 4.
- B** -4.
- C** 8.
- D** -8.

**20** O polinômio  $P(x) = x^3 - x - 1$  tem uma raiz real  $r$  tal que:

- A**  $0 < r < 1$
- B**  $1 < r < 2$
- C**  $2 < r < 3$
- D**  $3 < r < 4$
- E**  $4 < r < 5$

**21** Seja  $P(x)$  um polinômio divisível por  $(x - 2)$ . Se dividirmos o polinômio  $P(x)$  por  $(x^2 + 2x)$ , obtaremos como quociente o polinômio  $(x^2 - 2)$  e resto igual a  $R(x)$ . Se  $R(3) = 6$ , então, a soma de todos os coeficientes de  $P(x)$  é igual a:

- A** -38.
- B** -41.
- C** 91.
- D** 79.

**22** O resto da divisão de  $(2^{64} + 1)$  por  $(2^{32} + 1)$  é igual a

- A** 1.
- B** 0.
- C** 4.
- D** 2.

**23** Qual é o polinômio que ao ser multiplicado por  $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$  tem como resultado o polinômio  $h(x) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$ ?

- A**  $x^3 + x^2 + x$ .
- B**  $x^3 + x^2 - x$ .
- C**  $x^3 + 3x^2 + x$ .
- D**  $x^3 + 3x^2 + 2x$ .
- E**  $x^3 + 3x^2 - x$ .

**24** Analise as sentenças a seguir:

I. Se  $2^{3a} = 729$ , o resultado de  $2^{-a}$  é igual a  $\frac{1}{3}$

II. O resultado da operação  $(1,25 \cdot 10^{-4} - 1,16 \cdot 10^{-7})$  é igual a  $1,19 \cdot 10^{-4}$

III. Se  $x^2 = 25^{12}$ ;  $y^6 = 25^{12}$ ;  $w^7 = 25^{63}$ . O valor da expressão  $(x \cdot y \cdot w)^{12}$  é igual a  $25^{168}$

Com base nelas, é **CORRETO** afirmar que

- A** apenas I é falsa.
- B** apenas II é verdadeira.
- C** apenas I e II são verdadeiras.
- D** apenas I e III são verdadeiras.
- E** I, II e III são falsas.

**25** O valor de  $2017^2 - 2016^2$ , é

- A** 33
- B** 2.003
- C** 2.033
- D** 4.003
- E** 4.033

## GABARITO

**01** C

Somando todas as equações, temos  $a + b + c + d + e = R\$ 100,00$ .

**02 | C**

Calculando:

Para o mínimo de carne:

$$\text{Carne} \Rightarrow \begin{cases} 240 \text{ g} & \text{---} & 600 \\ 180 \text{ g} & \text{---} & x \end{cases} \Rightarrow x = 450 \text{ calorias}$$

$$\text{Torta} \Rightarrow 824 \text{ cal} - 450 \text{ cal} = 374 \text{ cal} \Rightarrow \begin{cases} 250 \text{ g} & \text{---} & 500 \\ y & \text{---} & 374 \end{cases} \Rightarrow y = 187 \text{ g}$$

Para o máximo de carne:

$$\text{Carne} \Rightarrow \begin{cases} 240 \text{ g} & \text{---} & 600 \\ 220 \text{ g} & \text{---} & x \end{cases} \Rightarrow x = 550 \text{ calorias}$$

$$\text{Torta} \Rightarrow 824 \text{ cal} - 550 \text{ cal} = 274 \text{ cal} \Rightarrow \begin{cases} 240 \text{ g} & \text{---} & 500 \\ y & \text{---} & 274 \end{cases} \Rightarrow y = 137 \text{ g}$$

**03 | C**

Calculando:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \\ -5x + y + mz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & m \end{vmatrix} = -3m + 39$$

Caso 1)  $D \neq 0 \Rightarrow 3m - 39 \neq 0 \Rightarrow m \neq 13 \Rightarrow \text{SPD}$ Caso 2)  $D = 0 \Rightarrow 3m - 39 = 0 \Rightarrow m = 13 \Rightarrow \text{SPI} \Rightarrow$  admite soluções diferentes da trivial.**04 | C**

O sistema possui uma única solução se, e somente

se,  $\frac{3}{3} \neq \frac{5}{\hat{a}} \Leftrightarrow \hat{a} \neq 5$ . Ademais, o sistema possui infinitas soluções se, e somente se,  $\beta = 5$ .Finalmente, como os termos independentes das duas equações são iguais, podemos concluir que o sistema possui ao menos uma solução, qualquer que seja o real  $\beta$ .**05 | D**

Somando as equações, temos

$$\frac{2x}{y} + \frac{2y}{z} + \frac{2z}{x} = 13 \Leftrightarrow \frac{x^2z + xy^2 + yz^2}{xyz} = \frac{13}{2}$$

**06 | B**

Calculando:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

Se:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd = 0 \Rightarrow ae = bd \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$$

 $D = 0 \Rightarrow$  sist. impossível ou possível indeterminado

Logo, estão incorretas as alternativas [A], [C] e [E]. Se os coeficientes são múltiplos (como apresentado na alternativa [D]), o sistema seria indeterminado. Assim, a alternativa correta é a [B].

**07 | C**

Calculando:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{27}{y^2} + \frac{8}{z^3} = 3 \\ \frac{4}{x} + \frac{81}{y^2} + \frac{40}{z^3} = 10 \\ \frac{2}{x} + \frac{54}{y^2} + \frac{24}{z^3} = 7 \end{cases}$$

Fazendo:

$$\frac{1}{x} = a; \frac{27}{y^2} = b; \frac{8}{z^3} = c$$

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a + 3b + 5c = 10 \\ 2a + 2b + 3c = 7 \end{cases}$$

(iii) - 2(ii), tem-se:

$$3c - 2c = 1 \rightarrow c = 1$$

$$\begin{cases} a + b + 1 = 3 \\ 4a + 3b + 5 = 10 \\ 2a + 2b + 3 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + 3b = 5 \\ 2a + 2b = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} = -1 &\rightarrow x = -1 \\ \frac{27}{y^2} = 3 &\rightarrow y = \pm 3 \\ \frac{8}{z^3} = 1 &\rightarrow z = 2 \end{aligned} \right\} |-1| + |3| + |2| = 6$$

**08 | D**Faremos, agora, a discussão do sistema em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

O primeiro passo será o cálculo do determinante dos coeficientes:



$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 192 + 16 \cdot b$$

O sistema Linear terá solução única se:

$$192 + 16 \cdot b \neq 0 \Rightarrow b \neq -12$$

Verificando o que acontece com o sistema quando  $b = -12$ , temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6z = -3 \\ 16y + 12z = a \\ x - 4y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 3x + 4y - 6z = -3 \\ 16y - 12z = a \end{cases}$$

O próximo passo é o escalonamento do sistema, vamos multiplicar a primeira equação por  $-1$  e somar com a segunda, trocando a segunda equação pela equação obtida.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 0 + 16y - 12z = -12 \\ 0 + 16y - 12z = a \end{cases}$$

Multiplicando, agora, a segunda equação por  $-1$  e somando com a terceira, temos:

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 3 \\ 0 + 16y - 12z = -12 \\ 0 + 0 + 0 = a + 12 \end{cases}$$

O sistema terá infinitas soluções se  $b = a = -12$  e será impossível se  $b = -12$  e  $a \neq -12$ .

Portanto, somente as afirmativas [I] e [II] são corretas.

#### 09| D

Se o sistema possui solução em comum, o sistema formado pelas quatro equações tem solução. Portanto, pode-se escrever:

$$\begin{cases} x - y = a \\ z - y = 1 \\ x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow z + x = 3$$

$$\begin{cases} x - y = a \\ y + z = b \end{cases} \Rightarrow z + x = a + b$$

$$\left. \begin{matrix} z + x = 3 \\ z + x = a + b \end{matrix} \right\} a + b = 3$$

#### 10| B

Para que o sistema homogêneo seja indeterminado devemos considerar o determinante dos coeficientes nulo.

Então:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & k \\ 3 & k & 1 \\ k & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^3 + 1 = 0 \Rightarrow k^3 = -1$$

Como  $k$  é um número real, devemos considerar  $k = -1$ .

Portanto,  $k = -1 \in (-2, 1]$ .

#### 11| D

Sejam  $y$  e  $z$ , respectivamente, a distância entre A e B e a distância entre C e D, pela rodovia. Logo, vem

$$\begin{cases} y + 5 = 3z \\ 5 + z = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3z - 5 \\ y = 2z + 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 40 \text{ km} \\ z = 15 \text{ km} \end{cases}$$

Portanto, segue que  $\frac{15}{40} \cdot 100\% = 37,5\%$  e, assim, a resposta é 37,5.

#### 12| E

Considerando que:

Márcia “pesa”  $x$  kg, Marta “pesa”  $y$  kg e Mônica “pesa”  $z$  kg, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 115 \\ y + z = 113 \\ x + z = 108 \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos:

$$2x + 2y + 2z = 336$$

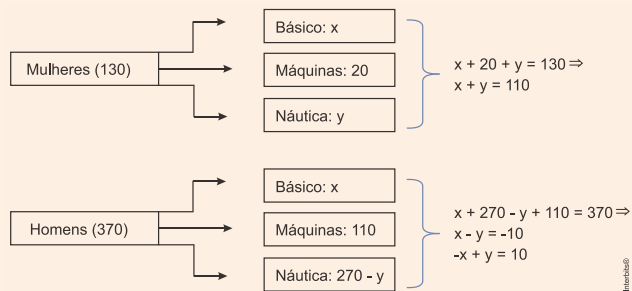
Portanto,

$$x + y + z = 168 \text{ kg}$$

#### 13| C

De acordo com o texto do problema e considerando que cada aluno não poderá fazer dois cursos ao mesmo tempo, temos:





Temos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ -x + y = 10 \end{cases}$$

Somando as equações, temos:

$$2y = 120 \Rightarrow y = 60$$

Portanto, o número de mulheres no curso de Náutica é 60.

#### 14 | B

De acordo com a igualdade acima, podemos escrever que:

$$\begin{cases} 2x + y = \ddot{e} \cdot x \\ x - y = \ddot{e} \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \ddot{e}) \cdot x + y = 0 \\ x - (1 + \ddot{e}) \cdot y = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema homogêneo admita outras soluções além da (0, 0) devemos considerar que seu determinante dos coeficientes seja nula:

$$\begin{vmatrix} 2 - \ddot{e} & 1 \\ 1 & -(1 + \ddot{e}) \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2 - \ddot{e}) \cdot (1 + \ddot{e}) - 1 = 0$$

$$-(2 + 2\ddot{e} - \ddot{e} - \ddot{e}^2) - 1 = 0$$

$$\ddot{e}^2 - \ddot{e} - 3 = 0$$

Logo, o produto das raízes  $\ddot{e}_1$  e  $\ddot{e}_2$  será dado por:

$$\ddot{e}_1 \cdot \ddot{e}_2 = \frac{-3}{1} = -3$$

#### 15 | A

O resto da divisão de  $p(x)$  por  $x + 1$  é igual a 3, portanto  $m$  e  $n$  são números pares, pois:

$$p(-1) = 3 \rightarrow p(-1) = (-1)^n + (-1)^m + 1 = 3 \rightarrow \log \begin{cases} (-1)^n = 1 \\ (-1)^m = 1 \end{cases}$$

#### 16 | B

$$(x + y + z)^2 = 7^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2 \cdot (xy + xz + yz) = 49 \rightarrow 25 + 2 \cdot (xy + xz + yz) = 49$$

$$xy + xz + yz = 12 \quad (\text{eq.1})$$

$$4 \cdot (xy + xz + yz) = xyz \rightarrow 4 \cdot 12 = xyz \rightarrow xyz = 48 \quad (\text{eq.2})$$

Utilizando polinômios e os valores das equações 1 e 2, pode-se escrever:

$$P(a) = (a - x) \cdot (a - y) \cdot (a - z) = a^3 - a^2 \cdot (x + y + z) + a \cdot (xy + xz + yz) - xyz$$

$$\begin{cases} P(x) = 0 \rightarrow x^3 - x^2 \cdot (x + y + z) + x \cdot (xy + xz + yz) - xyz = 0 \\ P(y) = 0 \rightarrow y^3 - y^2 \cdot (x + y + z) + y \cdot (xy + xz + yz) - xyz = 0 \\ P(z) = 0 \rightarrow z^3 - z^2 \cdot (x + y + z) + z \cdot (xy + xz + yz) - xyz = 0 \end{cases}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz + yz) \cdot (x + y + z) + 3xyz$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 7 \cdot 25 - 12 \cdot 7 + 3 \cdot 48$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 235$$

#### 17 | D

Calculando:

$$P(x) = x^3 + mx^2 + nx + 12$$

Por Girard:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -12$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3 \rightarrow x_3 = 4$$

$$x_2 + x_3 = 5 \rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3 \rightarrow x_1 = -3$$

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

$$n - 2m = -7 \rightarrow -11 - 2 \cdot (-2) = -7$$

#### 18 | D

Tem-se que

$$P(1) = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 = -2 \Leftrightarrow b + c = -4$$

e

$$P(2) = 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow 2b + c = -5.$$

Portanto, resolvendo o sistema formado por essas equações, encontramos  $b = -1$  e  $c = -3$ .

#### 19 | B

Para determinar o termo independente de um polinômio, devemos admitir  $x = 0$ . Portanto, o termo independente de  $(x^2 - 1)^3 \cdot (x^2 + x + 2)^2$  será dado por:

$$(0^2 - 1)^3 \cdot (0^2 + 0 + 2)^2 = -1 \cdot 4 = -4$$

#### 20 | B

Calculando:

$$P(0) = 0^3 - 0 - 1 = -1 < 0$$

$$\left. \begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0 \\ P(2) &= 2^3 - 2 - 1 = 5 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(1) \cdot P(2) < 0 \Rightarrow 1 < r < 2$$

$$P(3) = 3^3 - 3 - 1 = 23 > 0$$

$$P(4) = 4^3 - 4 - 1 = 59 > 0$$

$$P(5) = 5^3 - 5 - 1 = 119 > 0$$

**21 | B**

Calculando:

$$P(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2) + R(x)$$

$$R(x) = ax + b$$

$$P(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2) + ax + b$$

$$P(2) = 0$$

$$P(2) = (2^2 + 2 \cdot 2) \cdot (2^2 - 2) + 2a + b = 16 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -16$$

$$R(3) = 6$$

$$R(3) = 3a + b = 6$$

$$\begin{cases} 2a + b = -16 \\ 3a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 22 \\ b = -60 \end{cases}$$

$$P(x) = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2) + 22x - 60$$

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 18x - 60$$

$$\text{Soma coeficientes} = 1 + 2 - 2 + 16 - 60 = -41$$

**22 | D**

Considerando que  $2^{32} = x$  podemos escrever a divisão acima através de uma divisão de polinômios:

$$(x^2 + 1) \text{ por } (x + 1).$$

O resto  $R$  da divisão de  $x^2 + 1$  por  $(x + 1)$  é o valor numérico de  $x^2 + 1$  para  $x = -1$  (Teorema do Resto), ou seja:

$$R = (-1)^2 + 1 = 2.$$

**23 | E**

Calculando:

$$(3x^3 + 2x^2 + 5x - 4) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$$

$$3ax^6 +$$

$$+ (3bx^5 + 2ax^5) +$$

$$+ (3cx^4 + 2bx^4 + 5ax^4) +$$

$$+ (2cx^3 + 5bx^3 - 4ax^3) +$$

$$+ (5cx^2 - 4bx^2) +$$

$$+ (-4cx) = 3x^6 + 11x^5 + 8x^4 + 9x^3 - 17x^2 + 4x$$

$$3ax^6 = 3x^6 \Rightarrow a = 1$$

$$3bx^5 + 2ax^5 = 3bx^5 + 2x^5 = 11x^5 \Rightarrow 3bx^5 = 9x^5 \Rightarrow b = 3$$

$$3cx^4 + 2bx^4 + 5ax^4 = 3cx^4 + 6x^4 + 5x^4 = 8x^4 \Rightarrow 3cx^4 = -3x^4 \Rightarrow c = -1$$

Assim:

$$ax^3 + bx^2 + cx = x^3 + 3x^2 - x$$

**24 | E**

[I] Falsa.

$$2^{3a} = 729 \Rightarrow \sqrt[3]{2^{3a}} = \sqrt[3]{729} \Rightarrow 2^a = 9 \Rightarrow 2^{-a} = \frac{1}{9}$$

[II] Falsa.

$$1,25 \cdot 10^{-4} - 1,16 \cdot 10^{-7} = 10^{-4} \cdot (1,25 - 1,16 \cdot 10^{-3}) \neq 1,19 \cdot 10^{-4}$$

[III] Falsa.

$$x^2 = 25^{12} \Rightarrow x = 25^6$$

$$y^6 = 25^{12} \Rightarrow y = 25^2$$

$$w^7 = 25^{63} \Rightarrow w = 25^9$$

Portanto,

$$(x \cdot y \cdot z)^{12} = (25^6 \cdot 25^2 \cdot 25^9)^{12} = (25^{17})^{12} = 25^{204}$$

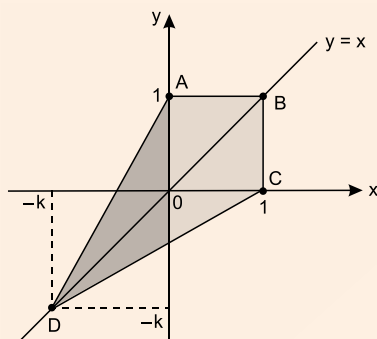
**25 | E**

$$2017^2 - 2016^2 = 4068289 - 4064256 = 4033$$

- 01| O triângulo ABC formado pelos pontos A (7, 3), B (-4, 3) e C (-4, -2) é

**A** escaleno  
**B** isósceles  
**C** equiângulo  
**D** obtusângulo

- 02| Os pontos A(0, 1), B(1, 1), C(1, 0) e D(-k, -k), com  $k > 0$ , formam o quadrilátero convexo ABCD, com eixo de simetria sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares.



O valor de  $k$  para que o quadrilátero ABCD seja dividido em dois polígonos de mesma área pelo eixo  $y$  é igual a

**A**  $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ .  
**B**  $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$ .  
**C**  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ .  
**D**  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ .  
**E**  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

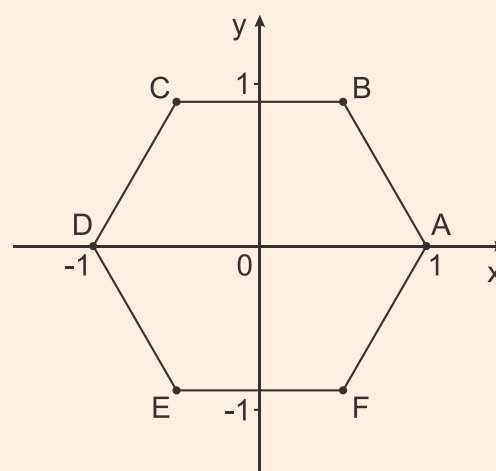
- 03| Considere a reta de equação  $4x - 7y + 10 = 0$ .

Seja  $y = mx + h$  a equação da reta obtida ao se fazer a reflexão da reta dada em relação ao eixo  $-X$ .

O valor de  $m + h$  é:

**A**  $-\frac{10}{11}$   
**B**  $-\frac{10}{7}$   
**C**  $-2$   
**D**  $-7$   
**E**  $-10$

- 04| Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1, 0) e o ponto D tem coordenadas (-1, 0), como na figura abaixo.



A equação da reta que passa pelos pontos B e D é



**A**  $y = \sqrt{3}x$ .

**B**  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**C**  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**D**  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**E**  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- 05** Considere os pontos  $A\left(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(-1, 0)$ .

A equação da reta que contém o segmento AB, a equação da reta que contém o segmento AC e o ângulo agudo formado entre elas são, RESPECTIVAMENTE:

**A**  $y = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$ ;  $y = 3x$ ;  $\frac{\pi}{4}$ .

**B**  $y = x + \frac{9}{5}$ ;  $y = -x + 1$ ;  $\frac{\pi}{2}$ .

**C**  $y = 3x + 5$ ;  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ .

**D**  $y = 3x + 5$ ;  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ ;  $\frac{\pi}{4}$ .

**E**  $y = x + \frac{9}{5}$ ;  $y = 2x + 1$ ;  $\frac{\pi}{4}$ .

- 06** Os pontos  $(0, -1)$ ,  $(1, 2)$  e  $(3, k)$  do plano são colineares. O valor de  $k$  é igual a

**A** 0

**B** 2

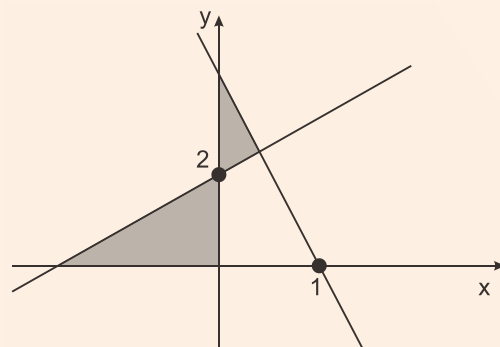
**C** -2

**D** 8

**E** -8

- 07** No gráfico, representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a  $-3$  e a

outra reta, inclinação igual a  $\frac{1}{2}$ . Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é



**A** 6 u.a.

**B**  $\frac{21}{5}$  u.a.

**C**  $\frac{29}{7}$  u.a.

**D**  $\frac{33}{7}$  u.a.

- 08** Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações  $3x - 2y + 6 = 0$  e  $3x + 4y - 12 = 0$  representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo dos  $x$  é

Dados: u.a.  $\equiv$  unidade de área

**A** 9 u.a.

**B** 10 u.a.

**C** 11 u.a.

**D** 12 u.a.

- 09** No plano cartesiano, a reta  $s: 4x - 3y + 12 = 0$  intersecta o eixo das abscissas no ponto A e o eixo das ordenadas no ponto B. Nessas condições, qual é a distância entre os pontos A e B?

**A** 5

**B**  $\sqrt{5}$

**C**  $2\sqrt{2}$

**D** 2

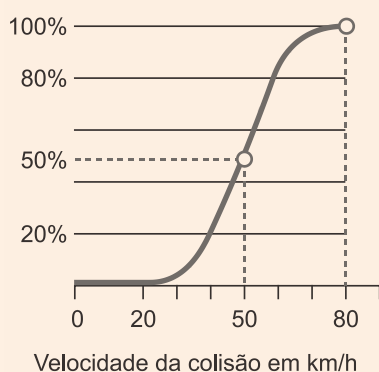
**E**  $\sqrt{2}$



- 10** | O jornal *Folha de S. Paulo* publicou em 11 de outubro de 2016, a seguinte informação:

**ATROPELAMENTOS**

Probabilidade de lesão fatal em %



Fonte: Prefeitura de São Paulo e CET. (Adaptado)

De acordo com as informações apresentadas, suponha que para uma velocidade de 35 km/h a probabilidade de lesão fatal seja de 5% e que para velocidades no intervalo  $[35; 55]$  o gráfico obedeça a uma função do 1º grau. Nessas condições, se um motorista dirigindo a 55 km/h, quiser reduzir a probabilidade de lesão fatal por atropelamento à metade, ele terá que reduzir a sua velocidade em, aproximadamente,

- A** 20%
- B** 25%
- C** 30%
- D** 35%

- 11** | Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações  $x^2 + y^2 - 10\sqrt{3}x - 25 = 0$  e  $x^2 + y^2 + 10\sqrt{3}x - 25 = 0$  representam circunferências. Cada uma dessas circunferências limitam uma área no plano. O comprimento da linha que contorna a união das áreas limitadas por cada uma destas circunferências é

Dados: u.c.  $\equiv$  unidade de comprimento

- A**  $\frac{200\pi}{3}$  u.c.
- B**  $\frac{80\pi}{3}$  u.c.

- C**  $\frac{50\pi}{3}$  u.c.
- D**  $\frac{100\pi}{3}$  u.c.

- 12** | Em qual das alternativas a seguir, o ponto P pertence à circunferência  $\beta$ ?

- A**  $P(5, 6); \beta: (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4$
- B**  $P(1, 2); \beta: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$
- C**  $P(1, 5); \beta: x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$
- D**  $P(1, 3); \beta: (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$
- E**  $P(3, 1); \beta: x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

- 13** | 2017) Os valores reais de n para os quais a reta (t)  $y = x + n$  seja tangente à elipse de equação  $2x^2 + 3y^2 = 6$  são iguais a

- A**  $-\sqrt{5}$  e  $\sqrt{5}$
- B**  $-\sqrt{3}$  e  $\sqrt{3}$
- C**  $-3$  e  $3$
- D**  $-2$  e  $2$
- E**  $-5$  e  $5$

- 14** | Na representação gráfica do sistema de equações  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 - y = 2 \end{cases}$  no plano cartesiano, uma

das soluções é  $(0, -2)$ . A distância entre os pontos que representam as duas outras soluções desse sistema é igual a

- A**  $\sqrt{14}$ .
- B**  $\frac{7}{2}$ .
- C**  $\frac{\sqrt{15}}{2}$ .
- D**  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ .
- E**  $\frac{3}{2}$ .

**GABARITO****01| A**

Calculando os quadrados das medidas dos lados do triângulo ABC, encontramos

$$d^2(A, B) = (-4 - 7)^2 + (3 - 3)^2 = 121,$$

$$d^2(A, C) = (-4 - 7)^2 + (-2 - 3)^2 = 146$$

e

$$d^2(B, C) = (-4 + 4)^2 + (-2 - 3)^2 = 25$$

Portanto, sendo

$$d^2(A, C) = d^2(A, B) + d^2(B, C),$$

podemos concluir que o triângulo ABC é retângulo escaleno.

**02| E**

Seja E o ponto de interseção da reta que passa pelos pontos C e D com o eixo das ordenadas. A equação de tal reta é dada por

$$y - 0 = \frac{-k - 0}{-k - 1} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{k}{k + 1} \cdot (x - 1).$$

Em consequência, vem  $E = \left(0, -\frac{k}{k + 1}\right)$  e, portanto, sendo  $k > 0$ , temos

$$\begin{aligned} (ADE) &= (ABCE) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{k}{k + 1}\right) \cdot k = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{k}{k + 1} + 1\right) \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 - k - 1 = 0 \\ &\Rightarrow k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

**03| C**

Calculando:

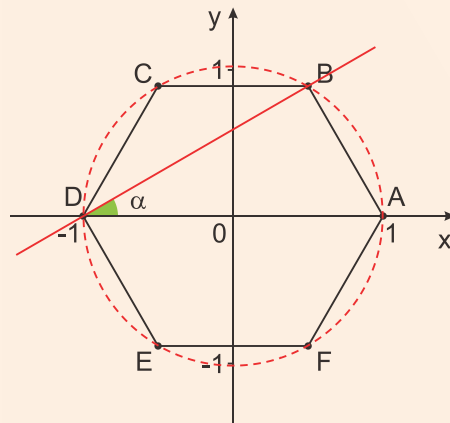
$$\text{reta } r: 4x - 7y + 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{7}x + \frac{10}{7}$$

$$\text{reta } s: y = mx + h$$

$$m_r = -m_s \Rightarrow m_s = -\frac{4}{7}$$

$$\text{reta } s: y = -\frac{4}{7}x - \frac{10}{7}$$

$$\left. \begin{aligned} m &= -\frac{4}{7} \\ h &= -\frac{10}{7} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m + h = -2$$

**04| B**

Considerando a circunferência circunscrita no hexágono regular, podemos escrever que a medida  $\alpha$  do ângulo  $\widehat{ADB}$  será dada por:

$$\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Portanto, o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos B e D será dado por:

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

A reta pedida passa pelo ponto  $D(-1, 0)$  e tem

$$\text{coeficiente angular } m = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, sua equação será dada por:

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**05| ANULADA**

Questão anulada no gabarito oficial.

Calculando:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$2 - \frac{1}{5} = m_{AB} \cdot \left(-1 + \frac{8}{5}\right) \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{3}{5} m_{AB} \Rightarrow m_{AB} = 3$$

$$\text{reta } \overline{AB} \Rightarrow y - 2 = 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 3x + 5$$

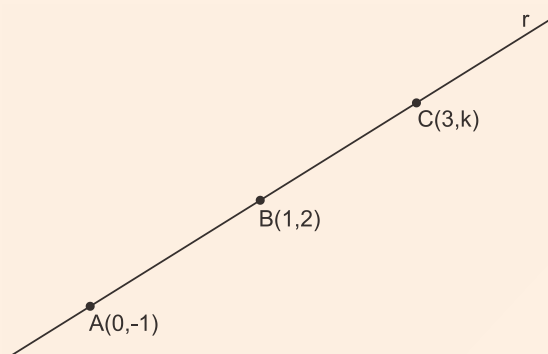
$$-1 - \frac{1}{5} = m_{AC} \cdot \left(0 + \frac{8}{5}\right) \Rightarrow -\frac{6}{5} = \frac{8}{5} m_{AC} \Rightarrow m_{AC} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{reta } \overline{AC} \Rightarrow y - 0 = -\frac{3}{4} \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_{AB} - m_{AC}}{1 + m_{AB} \cdot m_{AC}} \right| = \left| \frac{3 + \frac{3}{4}}{1 + 3 \cdot -\frac{3}{4}} \right| = \left| \frac{\frac{15}{4}}{-\frac{5}{4}} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 3 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3$$

**06 | D**

Do enunciado, temos:



$$m_r = m_{\overline{AB}} = m_{\overline{AC}}$$

Então,

$$\frac{2 - (-1)}{1 - 0} = \frac{k - (-1)}{3 - 0}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{k+1}{3}$$

$$3 \cdot 3 = k + 1$$

$$k = 8$$

**07 | C**

A equação da reta que passa pelo ponto  $(0, 2)$  é  $y = \frac{1}{2}x + 2$ , enquanto que a reta que passa pelo ponto  $(1, 0)$  tem por equação  $y = -3x + 3$ .

A área pedida corresponde à soma das áreas dos triângulos hachurados, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 2 & 3 & \frac{15}{7} & 2 \end{vmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot |8| + \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{4}{7} - \frac{6}{7} \right| \\ &= 4 + \frac{1}{7} \\ &= \frac{29}{7} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

**08 | A**

A reta  $y = \frac{3}{2}x + 3$  intersecta o eixo das abscissas no ponto  $(-2, 0)$  e o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 3)$ . Já a reta  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  intersecta o eixo das abscissas no ponto  $(4, 0)$  e o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 3)$ . Desse modo, a re-

gião cuja área queremos calcular corresponde ao triângulo de vértices  $(-2, 0)$ ,  $(0, 3)$  e  $(4, 0)$ .

O resultado é dado por

$$\frac{1}{2} \cdot (4 - (-2)) \cdot 3 = 9 \text{ u.a.}$$

**09 | A**Intersecção com o eixo  $x$  ( $y = 0$ ).

$$4x - 3 \cdot 0 + 12 = 0 \Rightarrow 4x = -12 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow A(-3, 0)$$

Intersecção com o eixo  $y$  ( $x = 0$ ).

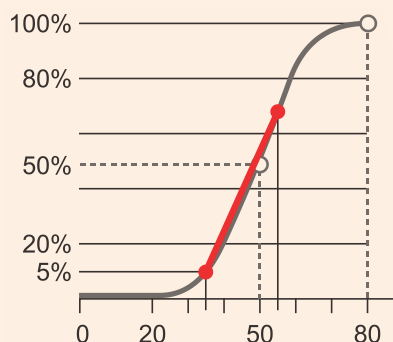
$$4 \cdot 0 - 3y + 12 = 0 \Rightarrow -3y = -12 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(0, 4)$$

Logo, a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  será dada por:

$$d = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

**10 | A**

Desenhando o gráfico (intervalo  $[35; 55]$  representado pelo trecho em vermelho):



Para encontrar a equação da reta em vermelho pode-se escrever:

$$m = \frac{50 - 5}{55 - 35} = \frac{45}{20} \rightarrow m = 2,25$$

$$y - 5 = 2,25 \cdot (x - 35) \rightarrow y = 2,25x - 74,25$$

Para  $x = 55$ , tem-se:

$$y = 2,25 \cdot 55 - 74,25 \rightarrow y = 65\%$$

Para reduzir esse risco à metade, pode-se escrever:

$$y = \frac{65\%}{2} = 32,5\%$$

$$32,5 = 2,25x - 74,25 \rightarrow x \approx 44,2$$

$$\frac{55 - 44,2}{55} \approx 0,2 = 20\% \text{ de redução}$$



**11 | D**

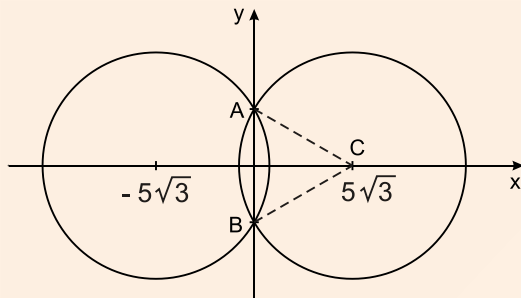
Completando os quadrados, vem

$$x^2 + y^2 - 10\sqrt{3}x - 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5\sqrt{3})^2 + (y - 0)^2 = 100$$

e

$$x^2 + y^2 + 10\sqrt{3}x - 25 = 0 \Leftrightarrow (x + 5\sqrt{3})^2 + (y - 0)^2 = 100$$

Considere a figura, em que A e B são os pontos de interseção das duas circunferências.



Se O é a origem do sistema de eixos cartesianos, então

$$\cos OCA = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos OCA = \frac{5\sqrt{3}}{10}$$

$$\Leftrightarrow OCA = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Portanto, segue que

$$AB = 2 \cdot OCA \cdot \overline{AC} = 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 10 = \frac{10\pi}{3} \text{ rad.}$$

O resultado pedido corresponde ao dobro do comprimento do maior arco AB, isto é,

$$2 \cdot \left( 2\pi \cdot 10 - \frac{10\pi}{3} \right) = \frac{100\pi}{3} \text{ u.c.}$$

**12 | A**

O único ponto P que quando substituído na equação da circunferência torna a sentença verdadeira é ponto da alternativa [A].

$$\beta: (5-3)^2 + (6-6)^2 = 4$$

**13 | A**

Resolvendo, inicialmente, um sistema com as equações da reta e da elipse:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 6 \\ y = x + n \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos:

$$2x^2 + 3 \cdot (x+n)^2 = 6$$

$$5x^2 + 6nx + 3n^2 - 6 = 0$$

Para a equação tenha duas raízes reais e iguais, ou seja a reta deve ser tangente a elipse, deveremos ter o valor do discriminante (delta) igual a zero.

$$(6n)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (3n^2 - 6) = 0$$

$$-24n^2 + 120 = 0$$

$$24n^2 = 120$$

$$n^2 = 5$$

$$n = \pm\sqrt{5}$$

**14 | C**

Tem-se que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 = \frac{y+2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(y^2 - 4) + y + 2 = 0 \\ x^2 = \frac{y+2}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+2)(4y-7) = 0 \\ x^2 = \frac{y+2}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \text{ ou } y = \frac{7}{4} \\ x^2 = \frac{y+2}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ e } y = -2 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y = \frac{7}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ e } y = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Portanto, a resposta é  $\frac{\sqrt{15}}{4} - \left( -\frac{\sqrt{15}}{4} \right) = \frac{\sqrt{15}}{2}$ .